Math. - CC 3 -

06/03/2023

Toutes les réponses seront justifiées. La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction.

PROBLÈME

On note $I = \mathrm{I}_3$ la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, et M la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} -7 & 0 & -8 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

On cherche à calculer les puissances entières M^n de M par trois méthodes différentes.

PARTIE 1 : Première méthode

1. Soit la matrice $A = \dfrac{1}{4}(M - I)$. Calculer A^2, et exprimer M en fonction de A et I.

2. En déduire, à l'aide d'un **raisonnement par récurrence**, qu'il existe une suite réelle (u_n) telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad M^n = I + u_n A$$

3. Vérifier que (u_n) est une suite arithmético-géométrique, et exprimer son terme général u_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

4. En déduire l'expression de M^n pour $n \in \mathbb{N}$.

PARTIE 2 : Deuxième méthode

1. Soit la matrice $J = \dfrac{1}{4}(M + 3I)$. Calculer J^2 puis J^n pour $n \geq 1$.

2. Déterminer, à l'aide du binôme de Newton, une expression de M^n en fonction de n, I et J pour $n \geq 1$.

3. Vérifier la validité de ce résultat avec la première méthode.

PARTIE 3 : Troisième méthode

1. On considère le système linéaire homogène S_λ de matrice associée $M - \lambda I$.

  a. Résoudre S_{-3} et montrer que les solutions $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ s'écrivent sous la forme zC_1 où $C_1 = \begin{pmatrix} \bullet \\ \bullet \\ 1 \end{pmatrix}$, et où les $\bullet$ sont des entiers relatifs à déterminer.

  b. Résoudre S_1 et montrer que les solutions $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ s'écrivent sous la forme $yC_2 + zC_3$ où $C_2 = \begin{pmatrix} \bullet \\ 1 \\ \bullet \end{pmatrix}$ et $C_3 = \begin{pmatrix} \bullet \\ \bullet \\ 1 \end{pmatrix}$, et où les $\bullet$ sont des entiers relatifs à déterminer.

2. Soit P la matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ dont les colonnes dans l'ordre sont C_1, C_2 et C_3.

  a. Montrer que P est inversible. **On ne demande pas de calculer** P^{-1}.

  b. Rappeler la valeur de $P^{-1}P$. **Sans calculer** P^{-1}, en déduire $P^{-1}C_1, P^{-1}C_2$ et $P^{-1}C_3$.

  c. Que valent MC_1, MC_2 et MC_3 ?
  En déduire MP puis $D = P^{-1}MP$, **sans calculer** P^{-1}.

  d. Calculer D^n, puis en déduire une expression de M^n en fonction de D^n pour $n \in \mathbb{N}$.

T.S.V.P. ►

EXERCICE 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\mathrm{e}^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$$

1. a. Justifier que f est du classe C^1 sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ et déterminer $f'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^*$.

b. Montrer que f est continue et dérivable en 0, et que $f'(0) = -\dfrac{1}{2}$.

c. f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}$? Justifier la réponse.

2. On admet que

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad -\frac{1}{2} \leq f'(x) < 0$$

a. Montrer que f admet un unique point fixe α et le déterminer.

b. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{1}{2}|u_n - \alpha|$, puis que $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \alpha| \leq \dfrac{1}{2^n}(1 - \alpha)$

c. Que peut-on en déduire ?

EXERCICE 2

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{ch}(x) - 1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que g est continue et dérivable en 0.

2. Montrer que g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

3. On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction g dans un repère du plan.
Déterminer une équation de la tangente à $\mathscr{C}$ en 0, ainsi que leur position relative.

EXERCICE 3

f désigne une fonction de classe C^{n+1} sur $\mathbb{R}$, avec $n \in \mathbb{N}$.
On suppose que $f^{(k)}(0) = 0$ pour $k \in [\![0, n+1]\!]$, et on pose pour $x \in \mathbb{R}$:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que g est de classe C^0 sur $\mathbb{R}$.

2. Soient $x \in \mathbb{R}^*$, et $p \in [\![0, n]\!]$. Démontrer l'égalité

$$g^{(p)}(x) = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (-1)^k k! \frac{f^{(p-k)}(x)}{x^{k+1}}$$

3. Justifier que pour $0 \leq k \leq p \leq n$ il existe une fonction $\varepsilon_{p,k}$ telle que $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_{p,k}(x) = 0$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, f^{(p-k)}(x) = x^{k+1}\varepsilon_{p,k}(x)$$

4. Montrer que $\lim\limits_{x\to 0} g^{(p)}(x) = 0$ pour $p \in [\![0, n]\!]$.

5. En déduire que la fonction g est de classe C^n sur $\mathbb{R}$ et donner toutes ses dérivées en 0 jusqu'à l'ordre n.

Fin de l'énoncé