Math. - CC 2

5/12/2022

Toutes les réponses seront justifiées. La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction.

EXERCICE 1

Soit a un complexe non nul. Déterminer les complexes z tels que

$$\mathrm{e}^z = a$$

EXERCICE 2

Soit le polynôme

$$Q(z) = z^3 - (9+\mathrm{i})z^2 + (28+5\mathrm{i})z - 32 - 4\mathrm{i}$$

1. Montrer que 4 est une racine de Q, et déterminer le polynôme R tel que

$$Q(z) = (z-4)R(z)$$

2. Déterminer alors les racines de Q.

3. On considère le triangle dont les sommets ont pour affixes les racines de Q. Justifier qu'il est rectangle isocèle.

EXERCICE 3

Soit n un entier naturel tel que $n \geq 2$, et $\omega_k = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}}$, $k \in [\![0, n-1]\!]$, les racines n-ème de l'unité.

1. Rappeler la valeur de la somme

$$S_1 = \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k$$

et le justifier.

2. Soit $p \in [\![1, n]\!]$. On considère la somme

$$S_p = \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k^p$$

Déterminer la valeur de S_p.

3. Soit la somme

$$R = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \omega_k$$

Montrer que R est un réel.

EXERCICE 4

Soit le polynôme

$$P(z) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left((z+\mathrm{i})^5 - (z-\mathrm{i})^5\right)$$

1. Déterminer les racines de P, et montrer qu'elles sont toutes réelles.
On pourra s'aider des racines $5^{\text{ème}}$ de l'unité.

2. A l'aide du binôme de Newton, développer et réduire $P(z)$, puis déterminer une autre expression de ses racines.

3. En déduire les valeurs exactes de

$$\tan\left(\frac{\pi}{5}\right) \quad \text{et} \quad \tan\left(\frac{2\pi}{5}\right)$$

EXERCICE 5

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \text{Arccos}\left(\frac{x}{\sqrt{2x^2-4x+4}}\right)$$

1. Donner le domaine de définition D_f et le domaine de dérivabilité $D_{f'}$ de f.

2. a. Exprimer simplement $f(1+\tan(u))$ pour $u \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

b. En déduire une forme simplifiée de $f(x)$ pour $x \in D_f$.

3. Retrouver le résultat précédent en dérivant f sur $D_{f'}$.

EXERCICE 6

I. Résultats préliminaires

1. Montrer que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \sin\left(2\text{Arctan}(t)\right) = \frac{2t}{1+t^2}$$

2. A l'aide du changement de variable $t = \tan(u)$ calculer

$$\int^x \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2}$$

3. En remarquant que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \frac{1}{(1+t^2)^2} = \frac{1}{1+t^2} - \frac{t^2}{(1+t^2)^2}$$

retrouver le résultat précédent, à l'aide d'une intégration par parties.

II. Résolution d'une équation différentielle

L'objectif de cette partie est de résoudre l'équation différentielle :

$$(H_0) \qquad (x^2+1)y'' - 2y = 0$$

1. Chercher une solution non nulle de (H_0) sous la forme $y_p : x \mapsto ax^2+bx+c$, où a, b et c désignent des constantes réelles.

2. On note $h : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2+1 \end{array}\right.$, et λ une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

a. Montrer que la fonction $f = \lambda h$ est solution de (H_0) si, et seulement si λ' est solution de l'équation différentielle :

$$(H_1) \qquad (1+x^2)y' + 4xy = 0$$

b. Résoudre (H_1).

c. En déduire l'ensemble des solutions de (H_0).

Fin de l'énoncé