Math. - CC 1

10/10/2022

Toutes les réponses seront justifiées. La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction.

EXERCICE 1

Résoudre les systèmes suivants (pour le second, on discutera en fonction des valeurs du paramètre réel k) :

$$\begin{cases} x - y + 3z = 1 \\ x + 3y - z = 0 \\ y - 2z = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x + y + kz = 0 \\ x + z = 1 \\ x + ky - z = 2 \end{cases}$$

EXERCICE 2

Résoudre les inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$:

1. $|x^2 + x - 1| \leq |2x + 1|$

2. $x - 2 < \sqrt{x^2 + 2x - 3}$

3. $\cos(2x) \geq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

EXERCICE 3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit trois sommes u_n, v_n et w_n par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}, \qquad v_n = \sum_{k=1}^{n} k^2, \qquad \text{et} \qquad w_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{v_k}$$

1. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

2. Déterminer les réels a, b et c vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{n(n+1)(2n+1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{2n+1}$$

3. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1} = u_{2n+1} - \frac{1}{2}u_n - 1$$

4. Exprimer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ w_n à l'aide des termes de la suite (u_n).

EXERCICE 4

Pour $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, on définit

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} (-1)^k \ln\left(\frac{k+1}{k-1}\right)$$

1. En faisant apparaître un télescopage, montrer que pour $n \geq 2$,

$$S_n = (-1)^n \ln(n+1) + (-1)^{n-1} \ln(n) + \ln(2)$$

2. En déduire que la suite $(S_n)_{n \geq 2}$ converge, et déterminer sa limite.

T.S.V.P. ▶

EXERCICE 5

On rappelle que

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

1. Montrer que

$$\forall t > 1, \quad \ln(t) > 2\frac{t-1}{t+1}$$

et en déduire que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, 0 < x < y \Longrightarrow \frac{y-x}{\ln(y)-\ln(x)} < \frac{x+y}{2}$$

2. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)}$$

Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n < \frac{n(n+1)(4n+5)}{12}$$

EXERCICE 6

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1-x^2}\right)$$

où $x \in \mathbb{R}$.

1. Justifier que f est définie sur $I = \left]-\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right]$.

2. En admettant que f est continue sur I et dérivable sur $I \setminus \{1\}$, déterminer $f'(x)$ et en déduire le tableau de variations complet de f (limites aux bornes comprises).

3. Soit M le maximum de f sur I. Déterminer M, puis justifier que f établit une bijection entre deux intervalles de la forme $J = \left]-\frac{\sqrt{2}}{2}, a\right]$ et $K =]b; M]$.

4. Sot $y \in K$. Déterminer explicitement l'unique solution dans J de l'équation

$$f(x) = y$$

5. On rappelle que $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$. Déterminer

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$

En donner une interprétation graphique.

Fin de l'énoncé