Math. - CC 4

07/04/22

Toutes les réponses seront justifiées. La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction.

EXERCICE 1

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathscr{P}_n$ l'ensemble des points $M(x, y, z)$ dont les coordonnées vérifient la relation suivante :

$$\mathscr{P}_n : \quad (x + y + z + 1) + n(x - 5y + 4z - 2) = 0$$

On note $\mathscr{P}_\infty$ l'ensemble des points $M(x, y, z)$ dont les coordonnées vérifient :

$$\mathscr{P}_\infty : \quad \begin{cases} x = 1 + s - t \\ y = -1 + s + 3t \\ z = -1 + s + 4t \end{cases} \quad , \quad (s, t) \in \mathbb{R}^2$$

1. Quelle est la nature géométrique des ensembles $\mathscr{P}_n$ et $\mathscr{P}_\infty$? Les caractériser.

2. Déterminer une équation cartésienne de $\mathscr{P}_\infty$.

3. Montrer que $\mathscr{D} = \mathscr{P}_0 \cap \mathscr{P}_\infty$ est une droite dont on déterminera une représentation paramétrique.

4. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \mathscr{D} \subset \mathscr{P}_n$.

5. En déduire l'intersection de $\mathscr{P}_n$ et $\mathscr{P}_\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

6. Calculer la distance d_n du point $A(1, 2, 3)$ à $\mathscr{P}_n$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

7. Étudier la convergence de la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

8. Calculer la distance d_∞ du point $A(1, 2, 3)$ à $\mathscr{P}_\infty$.

9. Calculer la distance d du point $A(1, 2, 3)$ à $\mathscr{D}$.

10. Soient H (resp. H_n, H_∞) le projeté orthogonal de $A(1, 2, 3)$ sur $\mathscr{D}$ (resp. $\mathscr{P}_n, \mathscr{P}_\infty$).
Démontrer que A, H, H_n et H_∞ sont cocycliques c'est-à-dire situés sur un même cercle que l'on caractérisera.

EXERCICE 2

1. Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme

$$P = X^3 - 6X^2 + 11X - 6$$

2. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle

$$\frac{3X^2 - 12X + 11}{(X-1)(X-2)(X-3)}$$

3. Déterminer une racine a du polynôme P' (polynôme dérivé de P), et vérifier que

$$\frac{1}{a-1} + \frac{1}{a-2} + \frac{1}{a-3} = 0$$

4. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $Q \in \mathbb{R}_n[X]$. On suppose que Q admet n racines distinctes $a_1, a_2, \cdots, a_n$.

a. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $\dfrac{Q'}{Q}$.

b. Soit a une racine de Q'. Justifier que a n'est pas une racine de Q et montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a - a_k} = 0$$

T.S.V.P. ►

EXERCICE 3

1. Montrer que les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$, et en déterminer une base :

$$F_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x - y - z = 0\right\}, \quad \text{et} \quad F_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x - y + z = 0 \text{ et } 2x + y - z = 0\right\}$$

2. Montrer que F_1 et F_2 sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

3. Donner la dimension de $F_3 = \mathrm{Vect}\{(1,0,1),(1,-2,-1),(0,1,1)\}$.

4. Donner une base de $F_1 \cap F_3$ et de $F_1 + F_3$.

Fin de l'énoncé