Math. - CC 3

17/02/22

Toutes les réponses seront justifiées. La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction.

EXERCICE 1

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ les systèmes linéaires suivants où a, b, c sont des réels fixés :

1. $\begin{cases} x+y+z &= 2 \\ x+y-z &= 0 \\ x+2y-z &= 3 \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} 2x-y+2z &= a \\ 3x-y+z &= b \\ -2x+3y-10z &= c \end{cases}$

EXERCICE 2

On s'intéresse dans cet exercice aux trois suites réelles (a_n), (b_n) et (c_n) définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} a_{n+1} = & 2a_n - b_n + c_n \\ b_{n+1} = & -4a_n + 7b_n - 6c_n \\ c_{n+1} = & -5a_n + 7b_n - 6c_n \end{cases}$$

avec $a_0 = 2$, $b_0 = 1$ et $c_0 = -1$.
Pour tout entier naturel n, on note :

$$X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} \quad \textbf{et} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -4 & 7 & -6 \\ -5 & 7 & -6 \end{pmatrix}$$

1. a. Vérifier que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = A\ X_n$$

b. En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = A^n\ X_0$$

2. Soit P la matrice définie par

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

a. Calculer P^2 et déterminer $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ tels que :

$$P^2 = \alpha P + \beta I_3$$

b. En déduire que P est inversible, et déterminer P^{-1}.

3. a. Calculer $T = P^{-1}AP$ et en déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = PT^nP^{-1}$$

b. A l'aide du binôme de Newton dont on justifiera l'utilisation, calculer T^n.

c. En déduire A^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

4. Donner l'expression de a_n, b_n et c_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

T.S.V.P. ▶

EXERCICE 3

1. Montrer que

$$\forall x > 0,\ \operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$$

2. Donner le développement limité de Arctan à l'ordre 3 au voisinage de 0.

3. Trouver alors trois réels a, b, c tels que

$$\operatorname{Arctan}(x) \underset{x \to +\infty}{=} a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^3} + \circ\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

EXERCICE 4

Soit a et b deux réels strictement positifs.

1. Donner le domaine de définition de

$$f:\ x\ \mapsto\ \frac{1}{x^a\,(\ln(x)^b)}$$

2. Trouver les valeurs de $c \in \mathbb{R}$ telles que

$$f(x) \underset{x \to +\infty}{=} \circ\left(\frac{1}{x^c}\right)$$

3. Donner un équivalent de $f(x)$ en 1.

EXERCICE 5

Soit f la fonction suivante :

$$f:\ \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \end{array}$$

1. a. Montrer que f est deux fois dérivable sur $[0,1]$ et que

$$\forall x \in [0,1],\ f''(x) = (^2-1)f(x)$$

b. En déduire les variations de la fonction f' sur $[0,1]$.

c. Montrer que pour tous $\alpha, \beta \in [0,1]$ tels que $\alpha \leq \beta$, on a :

$$f'(\beta)(\beta-\alpha) \leq f(\beta) - f(\alpha) \leq f'(\alpha)(\beta-\alpha)$$

2. Soit $a \in [0,1]$. On note T_a la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a.

a. Donner l'équation réduite $y = u(x)$ de T_a.

b. Montrer que :

$$\forall x \in [0,1],\ f(x) \leq u(x)$$

On pourra distinguer les cas $0 \leq x \leq a < 1$ et $0 < a \leq x \leq 1$.

c. Interpréter géométriquement ce résultat.

3. Soit $a, b \in [0,1]$ tels que $a < b$. On note $D_{a,b}$ la droite passant par les points de coordonnées $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$.

a. Donner l'équation réduite $y = v(x)$ de $D_{a,b}$.

b. Montrer que

$$\exists c \in [a,b],\ f'(c) = v'(c)$$

c. Montrer que

$$\forall x \in [a,b],\ f(x) \geq v(x)$$

d. Interpréter géométriquement ce résultat.