Math. - CC 2

02/12/21

Toutes les réponses seront justifiées. La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction.

EXERCICE 1

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \operatorname{Arcsin}\left(\frac{\sqrt{2-x^2}+x}{2}\right)$$

1. Donner le domaine de définition de f.

2. Exprimer simplement $f\left(\sqrt{2}\sin(a)\right)$, pour $a \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

3. En déduire une expression simplifiée de $f(x)$ sur son domaine de définition.

EXERCICE 2

Soit $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, $\theta \in]-\pi, \pi[$ un nombre complexe différent de -1.

1. Mettre le nombre complexe $Z = \dfrac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}$ sous forme trigonométrique.

2. En déduire le module et l'argument du nombre complexe z tel que

$$\frac{2+\mathrm{i}z}{2-\mathrm{i}z} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$$

3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$(2+\mathrm{i}z)^5 = (2-\mathrm{i}z)^5$$

4. En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation

$$\left(\mathrm{i}z^2 + (2-\mathrm{i})z - 2\right)^5 = \left(-\mathrm{i}z^2 + (2+\mathrm{i})z - 2\right)^5$$

EXERCICE 3

Etant donné $z \in \mathbb{C} \setminus \{2\mathrm{i}\}$, on considère

$$f(z) = \frac{z+\mathrm{i}}{z-2\mathrm{i}}$$

On se place dans le plan complexe. Déterminer l'ensemble des points d'affixe z tels que :

1. $f(z) \in \mathbb{R}$.

2. $f(z)$ est un imaginaire pur.

3. $f(z) = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{3}}$.

T.S.V.P. ▶

EXERCICE 4

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $I =]0, +\infty[$ et

$$(E_n) : \quad xy' + ny = \frac{1}{1+x^2}$$

PARTIE 1 : Résolution de (E_n)

On note (H_n) l'équation homogène associée à (E_n).

1. Résoudre (H_n) sur I.

2. Résolution de (E_0)

a. Déterminer les réels a et b tels que

$$\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{a}{x} + \frac{bx}{1+x^2}$$

b. En déduire les solutions de (E_0).

3. Résoudre (E_1).

4. Résolution de (E_n)
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note :

$$\forall x \geq 0, \quad F_n(x) = \int_0^x \frac{t^{n-1}}{1+t^2} \mathrm{d}t$$

Etablir que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les solutions de (E_n) sur I sont les fonctions de la forme

$$y : x \mapsto \frac{F_n(x) + C}{x^n}, \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}$$

PARTIE 2 : Forme explicite des solutions de (E_n)

1. Démontrer que pour $n \geq 1$, on a :

$$\forall x > 0, \quad F_n(x) + F_{n+2}(x) = \frac{x^n}{n}$$

2. a. Calculer $F_1(x)$ pour tout $x > 0$.

b. Calculer $F_2(x)$ pour tout $x > 0$.

3. a. Etablir que

$$\forall n \geq 2, \quad \forall x > 0, \quad F_{2n}(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{2} \ln(1+x^2) + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{n-1-k} \frac{x^{2k}}{2k}$$

b. Etablir que

$$\forall n \geq 1, \quad \forall x > 0, \quad F_{2n+1}(x) = (-1)^n \mathrm{Arctan}(x) + \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-1-k} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

4. Résoudre (E_3) et (E_4).