Math. - CC 1

14/10/21

Toutes les réponses seront justifiées. La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction.

EXERCICE 1

Résoudre les systèmes suivants :

$$\textbf{1.} \begin{cases} 3x + y + z = 2 \\ x + y - 2z = -2 \\ 2x + 3y - 4z = -1 \end{cases} \qquad \textbf{2.} \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x - 3y - 2z = 1 \\ x + 2y + 3z = -1 \end{cases}$$

EXERCICE 2

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation d'inconnue x suivante :

$$1 - \sqrt{2}\sin(2x) \geq 2$$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue x suivante :

$$\sqrt{3}\cos(x) + \sin(x) = -1$$

EXERCICE 3

Soit $a \in \mathbb{R}$, f_a la fonction définie par

$$f_a(x) = \ln(x^2 - ax + 4)$$

et C_a sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Donner, suivant les valeurs de a, le domaine de définition D_a de f_a.

2. Comparer $f_a(x)$ et $f_{-a}(-x)$. Que peut-on en déduire pour C_a et C_{-a} ?

3. On suppose $a = 4$. La fonction ln est représentée graphiquement dans le repère fourni en annexe.

a. Montrer que

$$\forall x \in D_4,\ f_4(x) = 2\ln|x - 2|$$

b. Représenter alors graphiquement C_4 dans le repère fourni en annexe. **On justifiera.**

c. Enfin, représenter graphiquement C_{-4} dans le même repère fourni en annexe. **On justifiera.**

4. On suppose maintenant que $-4 < a < 4$.

a. Déterminer le tableau de variation complet de f_a. On déterminera les limites aux bornes de D_a.

b. Représenter alors graphiquement C_2 dans le même repère fourni en annexe.

T.S.V.P. ▶

EXERCICE 4

Partie I : Somme des puissances p-èmes des n premiers entiers

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$, on pose :

$$K(n,p) = \sum_{k=1}^{n} k^p$$

1. Après avoir justifié que $K(n+1,p+1) = \sum_{k=0}^{n}(k+1)^{p+1}$, montrer que

$$K(n+1,p+1) = 1 + \sum_{q=0}^{p+1} \binom{p+1}{q} K(n,q)$$

2. En déduire que

$$\sum_{q=0}^{p} \binom{p+1}{q} K(n,q) = (n+1)^{p+1} - 1$$

3. a. Déterminer $K(n,0)$.

b. En déduire les valeurs de $K(n,1), K(n,2)$ et $K(n,3)$.

Partie II : Somme des cubes des n premiers entiers

On considère une suite de nombres réels $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$x_0 = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_n > 0, \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} x_k^3 = \left(\sum_{k=0}^{n} x_k\right)^2$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $S_n = \sum_{k=0}^{n} x_k$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$x_{n+1}^3 = 2S_n x_{n+1} + x_{n+1}^2$$

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$x_n = n$$

3. Réciproquement, en remarquant que pour $n \in \mathbb{N}$, $\left(\sum_{k=0}^{n} k\right)^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2 + 2 \sum_{0\le i<j\le n} ij$, montrer que la suite des entiers vérifie les conditions de l'énoncé.

4. Retrouver $K(n,3)$.

Fin de l'énoncé

Nom, Prénom, Classe :