CB n°8 - Analyse asymptotique - Sujet 1

1. Déterminer les limites suivantes, en détaillant la démarche (la limite seule ne sera pas acceptée) :

a. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1-\cos(2x))^2}{\sin^4(x)}$

$(1-\cos(2x))^2 \underset{x\to 0}{\sim} \left(\dfrac{(2x)^2}{2}\right)^2$ et $\sin^4(x) \underset{x\to 0}{\sim} x^4$ d'où, par quotient : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1-\cos(2x))^2}{\sin^4(x)} = 4$

b. $\lim\limits_{x\to +\infty} x\left(\ln(2+x)-\ln(x)\right)$

$\ln(2+x)-\ln(x) = \ln\left(1+\dfrac{2}{x}\right)$ et $\ln\left(1+\dfrac{2}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{2}{x}$ d'où : $\lim\limits_{x\to +\infty} x\left(\ln(2+x)-\ln(x)\right) = 2$

c. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(x)}{1-\sqrt{x}}$

En posant $x = 1+h$, on a : $\dfrac{\ln(1+h)}{1-\sqrt{1+h}} \underset{h\to 0}{\sim} \dfrac{h}{-\frac{1}{2}h}$ d'où : $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(x)}{1-\sqrt{x}} = -2$

2. Déterminer le développement limité au voisinage de 0 à l'ordre indiqué des fonctions suivantes :

a. $u : x \mapsto \dfrac{\ln(1+x)}{2x-x^2}$ à l'ordre 3

$u(x) \underset{x\to 0}{=} \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{6}x^2 - \dfrac{1}{24}x^3 + o(x^3)$ obtenu par produit de DL usuels.

b. $v : x \mapsto \sqrt{1+\sqrt{1+x}}$ à l'ordre 3

$v(x) \underset{x\to 0}{=} \sqrt{2}\left(1 + \dfrac{1}{8}x - \dfrac{5}{128}x^2 + \dfrac{21}{1024}x^3\right) + o(x^3)$ obtenu par composition de DL usuels.

c. $w : x \mapsto \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{x}{1+x^2}\right)$ à l'ordre 6

$\dfrac{1}{1+x^2} \underset{x\to 0}{=} 1 - x^2 + x^4 + o(x^5)$ donc, par primitivation, $\operatorname{Arctan}(x) \underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{1}{5}x^5 + o(x^6)$.

Par composition, on obtient : $w(x) \underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{4}{3}x^3 + \dfrac{11}{5}x^5 + o(x^6)$.

<u>Autre méthode :</u> w est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, w'(x) = \dfrac{1-x^2}{1+3x^2+x^4}$.

Un produit de DL usuels donne : $w'(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - 4x^2 + 11x^4 + o(x^5)$ puis, par le théorème de primitivation, $w(x) \underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{4}{3}x^3 + \dfrac{11}{5}x^5 + o(x^6)$

3. Déterminer le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de $\dfrac{\pi}{3}$ de la fonction $h : x \mapsto \ln(\cos(x))$

Au voisinage de $\dfrac{\pi}{3}$, h est de classe C^∞ et on a :

$h'(x) = -\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan(x)$, $h''(x) = -(1+\tan^2(x))$, $h^{(3)}(x) = -2\tan(x)(1+\tan^2(x))$.

A l'aide de la formule de Taylor-Young, on obtient :

$$h(x) \underset{x\to\frac{\pi}{3}}{=} -\ln(2) - \sqrt{3}\left(x-\frac{\pi}{3}\right) - 2\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^2 - \frac{4\sqrt{3}}{3}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^3 + o\left(\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^3\right)$$

CB n°8 - Analyse asymptotique - Sujet 2

1. Déterminer les limites suivantes, en détaillant la démarche (la limite seule ne sera pas acceptée) :

a. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(2-\cos(2x))}{x\,\sin(3x)}$

$\ln(2-\cos(2x)) \underset{x\to 0}{=} \ln\left(1+\dfrac{(2x)^2}{2}+o(x^2)\right)$ donc $\ln(2-\cos(2x)) \underset{x\to 0}{\sim} 2x^2$ et $x\sin(3x) \underset{x\to 0}{\sim} 3x^2$

d'où, par quotient : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(2-\cos(2x))}{x\,\sin(3x)} = \dfrac{2}{3}$

b. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right)}{\mathrm{e}^{1-x}}$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$ donc $\ln\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right) \underset{x\to +\infty}{\sim} \mathrm{e}^{-x}$ d'où, par quotient : $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right)}{\mathrm{e}^{1-x}} = \mathrm{e}^{-1}$

c. $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{x}}$

En posant $x=1-h$ on a : $1-\sqrt{1-h} \underset{h\to 0}{=} \dfrac{1}{2}h+o(h)$ donc par quotient : $\dfrac{\sqrt{h}}{1-\sqrt{1-h}} \underset{h\to 0}{\sim} \dfrac{2}{\sqrt{h}}$

d'où $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{x}} = +\infty$

2. Déterminer le développement limité au voisinage de 0 à l'ordre indiqué des fonctions suivantes :

a. $u : x \mapsto \dfrac{\ln(1-x)}{3x+x^2}$ à l'ordre 3

$u(x) \underset{x\to 0}{=} -\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{18}x-\dfrac{5}{54}x^2-\dfrac{17}{324}x^3+o(x^3)$

b. $v : x \mapsto \ln(1+\ln(1+x))$ à l'ordre 4

$v(x) \underset{x\to 0}{=} x-x^2+\dfrac{7}{6}x^3-\dfrac{35}{24}x^4+o(x^4)$

c. $w : x \mapsto \mathrm{Arcsin}\left(\dfrac{x+1}{2}\right)$ à l'ordre 4

w est dérivable sur $]-3;1[$ et $\forall x \in]-3;1[, w'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3-2x-x^2}}$.

Le DL de $(1+u)^{-\frac{1}{2}}$ donne : $w'(x) \underset{x\to 0}{=} \dfrac{\sqrt{3}}{3}\left(1+\dfrac{1}{3}x+\dfrac{1}{3}x^2+\dfrac{7}{27}x^3+o(x^3)\right)$ puis, par le théorème de primitivation, $w(x) \underset{x\to 0}{=} \dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\sqrt{3}}{3}x+\dfrac{\sqrt{3}}{18}x^2+\dfrac{\sqrt{3}}{27}x^3+\dfrac{7\sqrt{3}}{324}x^4+o(x^4)$

3. Déterminer le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de $\dfrac{\pi}{6}$ de la fonction $h : x \mapsto \ln(\sin(x))$

Au voisinage de $\dfrac{\pi}{6}$, h est de classe C^∞ et on a :

$h'(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$, $h''(x) = -\dfrac{1}{\sin^2(x)}$, $h^{(3)}(x) = \dfrac{2\cos(x)}{\sin^3(x)}$.

A l'aide de la formule de Taylor-Young, on obtient :

$h(x) \underset{x\to\frac{\pi}{6}}{=} -\ln(2)+\sqrt{3}\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)-2\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)^2+\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)^3+o\left(\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)^3\right)$