

CB N°7 - MATRICES - SYSTÈMES LINÉAIRES - SUJET 1

1. Pour chaque matrice ci-dessous, préciser si elle est inversible et, le cas échéant, déterminer son inverse :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -1 \end{pmatrix} \quad B \notin \text{GL}_3(\mathbb{R}) \quad C^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 & 1 \\ -4 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Résoudre les systèmes suivants :

$$\text{a. } \begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ -x + y + 2z = 2 \\ 2y + z = -1 \end{cases} \quad S = \left\{ \left(-\frac{2}{3}; -\frac{10}{9}; \frac{11}{9} \right) \right\}$$

$$\text{b. } \begin{cases} y + z = 1 \\ -2x + 4y + 2z = 3 \\ -2x + y - z = 0 \end{cases} \quad S = \left\{ \left(\frac{1}{2} - z; 1 - z; z \right), z \in \mathbb{R} \right\}$$

3. Résoudre le système suivant, en fonction des valeurs du paramètre a :
$$\begin{cases} ax + y + z = 0 \\ ax + ay + z = 1 \\ ay + z = 1 \end{cases}$$

$$\rightsquigarrow \text{Si } a = 0, \quad S = \{(x; -1; 1), x \in \mathbb{R}\}$$

$$\rightsquigarrow \text{Si } a = 1, \quad S = \emptyset$$

$$\rightsquigarrow \text{Sinon, } S = \left\{ \left(0; \frac{1}{a-1}; \frac{1}{1-a} \right) \right\}$$

CB N°7 - MATRICES - SYSTÈMES LINÉAIRES - SUJET 2

1. Pour chaque matrice ci-dessous, préciser si elle est inversible et, le cas échéant, déterminer son inverse :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A \notin \text{GL}_3(\mathbb{R}), \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{4}{9} & -\frac{1}{9} \end{pmatrix} \quad C^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 4 \\ -4 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

2. Résoudre les systèmes suivants :

$$\text{a. } \begin{cases} 2x - y + 2z = 1 \\ -x + y + z = 2 \\ y + 4z = 5 \end{cases} \quad S = \{(3 - 3z; 5 - 4z; z), z \in \mathbb{R}\}$$

$$\text{b. } \begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ -2x + 2z = 1 \\ y + z = 2 \end{cases} \quad S = \emptyset$$

3. Résoudre le système suivant, en fonction des valeurs du paramètre a :
$$\begin{cases} y + az = -1 \\ ax + z = 1 \\ ax - y + az = 1 \end{cases}$$

$$\rightsquigarrow \text{ Si } a = 0, \quad S = \{(x; -1; 1), x \in \mathbb{R}\}$$

$$\rightsquigarrow \text{ Si } a = \frac{1}{2}, \quad S = \emptyset$$

$$\rightsquigarrow \text{ Sinon, } \quad S = \left\{ \left(\frac{2}{2a-1}; \frac{a-1}{1-2a}; \frac{1}{1-2a} \right) \right\}$$