CB N°6 - Suites numériques - Sujet 1

1. Question de cours

Montrer (en utilisant uniquement la définition des limites) que si (u_n) et (v_n) sont des suites réelles admettant respectivement pour limites 0 et $+\infty$, alors la suite $(u_n + v_n)$ admet pour limite $+\infty$.

Soit $M \in \mathbb{R}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ donc : $\exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_1) \Rightarrow (u_n \geq -1)$

$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ donc : $\exists n_2 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_2) \Rightarrow (v_n \geq M+1)$

On en déduit : $\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq \max(n_1, n_2)) \Rightarrow (u_n + v_n \geq M)$.

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = +\infty$

2. Établir la limite des suites suivantes, et justifier la réponse :

a. $u_n = \dfrac{\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{n}$, $\quad \forall n \geq 1, -\dfrac{1}{n} \leq u_n \leq \dfrac{1}{n} \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ (par encadrement).

b. $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k} - \frac{2}{k+1} \underbrace{=}_{\text{télescopage}} 2 - \frac{2}{n+1} \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} v_n = 2$

c. $w_n = n\tan\left(\dfrac{2}{n}\right) = \dfrac{2\tan\left(\frac{2}{n}\right)}{\frac{2}{n}} \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 2$,

car $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\tan(x)}{x} = \tan'(0) = 1 + \tan^2(0) = 1$ (limite d'un taux d'accroissement).

d. $x_n = \dfrac{-3^n + 2^n}{3^n + 2n} = \dfrac{3^n\left(-1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)}{3^n\left(1 + \frac{2n}{3^n}\right)} \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = -1$

car, $0 < \dfrac{2}{3} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{2}{3}\right)^n = 0$ et, par croissances comparées, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n}{3^n} = 0$

3. Expliciter les suites réelles suivantes en fonction de n :

a. $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = 3u_n - 4 \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$ $\quad u_n = 2 - 3^{n+1}$

b. $\begin{cases} u_0 = -1, \quad u_1 = 2 \\ u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$ $\quad u_n = \dfrac{4}{3}(-1)^{n+1} + \dfrac{2^n}{3}$

c. $\begin{cases} u_0 = -1, \quad u_1 = 1 \\ u_{n+2} = -4(u_{n+1} + u_n) \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$ $\quad u_n = (-2)^n\left(\dfrac{n}{2} - 1\right)$

4. Établir les variations et la convergence éventuelle des suites réelles suivantes :

a. $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = u_n^2 + 3u_n + 2 \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = u_n^2 + 2u_n + 2$; or $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 2x + 2 > 0 \, (\Delta < 0)$ donc la suite est croissante. D'après le théorème du point fixe, si (u_n) converge vers l, on a : $l^2 + 2l + 2 = 0$; cette équation n'admettant pas de solution réelle, on en déduit que (u_n) diverge et, comme elle est croissante, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

b. $u_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}$, pour $n \geq 1$

$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} - u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}\left(\dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n}\right) + \dfrac{1}{(n+1)^2} = \dfrac{1}{n+1}\left(\dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}\right)$;

Comme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k} \geq 1$, on en déduit que $\dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k} \leq \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n} \leq 0$.

Ainsi, la suite (u_n) est décroissante, et comme elle est clairement minorée par 0 on déduit du théorème de convergence monotone qu'elle converge.

5. On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} : \quad u_{n+1} = \frac{2}{1+u_n^2}$$

a. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_n \leq 2$.

La fonction $f : x \mapsto \dfrac{2}{1+x^2}$ est décroissante sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.

$u_0 \in [0;2]$;

$\forall n \in \mathbb{N}, (0 \leq u_n \leq 2) \Rightarrow (f(2) \leq f((u_n) \leq f(0)) \Rightarrow \left(0 \leq \dfrac{2}{5} \leq u_{n+1} \leq 2\right)$.

Par principe de récurrence, on a donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0;2]$.

b. Établir la convergence des suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}).

La fonction f étant décroissante sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, la fonction $f \circ f$ est croissante de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$. Ainsi, les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont des suites monotones. On a montré à la question précédente qu'elles sont bornées, elles sont donc convergentes, d'après le théorème de convergence monotone.

c. En admettant que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^5 - 2x^4 + 2x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = (x-1)^3(x^2+x+2)$$

déduire des questions précédentes la convergence de la suite (u_n) ainsi que sa limite.

Les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers un point fixe de la fonction $f \circ f$ (qui est continue).

On a : $(f \circ f(x) = x) \Leftrightarrow (x^5 - 2x^4 + 2x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0) \Leftrightarrow (x = 1)$, d'après la factorisation donnée.

Ainsi (u_{2n}) et (u_{2n+1}) admettent la même limite égale à 1. On en déduit que la suite (u_n) converge vers 1.

CB n°6 - Suites numériques - Sujet 2

1. Question de cours

Montrer (en utilisant uniquement la définition des limites) que si (u_n) et (v_n) sont des suites réelles admettant respectivement pour limites 1 et $+\infty$, alors la suite $(u_n \times v_n)$ admet pour limite $+\infty$.

Soit $M \in \mathbb{R}^+$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$ donc : $\exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_1) \Rightarrow \left(u_n \geq \frac{1}{2}\right)$

$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ donc : $\exists n_2 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_2) \Rightarrow (v_n \geq 2M)$

On en déduit : $\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq \max(n_1, n_2)) \Rightarrow (u_n \times v_n \geq M)$.

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n \times v_n) = +\infty$

2. Établir la limite des suites suivantes, et justifier la réponse :

a. $u_n = \dfrac{\sin(n^2)}{n}$ $\quad \forall n \geq 1, -\dfrac{1}{n} \leq u_n \leq \dfrac{1}{n} \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ (par encadrement).

b. $v_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{2}{k} - \frac{2}{k-1} \underbrace{=}_{\text{télescopage}} \frac{2}{n} - 2 \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} v_n = -2$

c. $w_n = n \tan\left(\dfrac{1}{n^2}\right) = \dfrac{\tan\left(\frac{1}{n^2}\right)}{n\frac{1}{n^2}} \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$,

car $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan(x)}{x} = \tan'(0) = 1 + \tan^2(0) = 1$ (limite d'un taux d'accroissement).

d. $x_n = \dfrac{4^n - 3^n}{4^n + 3n} = \dfrac{4^n\left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right)}{4^n\left(1 + \frac{3n}{4^n}\right)} \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 1$

car, $0 < \dfrac{3}{4} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{3}{4}\right)^n = 0$ et, par croissances comparées, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3n}{4^n} = 0$

3. Expliciter les suites réelles suivantes en fonction de n :

a. $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = -2u_n + 3 \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$ $\quad u_n = 1 + (-2)^{n+1}$

b. $\begin{cases} u_0 = -2, \quad u_1 = 1 \\ u_{n+2} = -u_{n+1} + 2u_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$ $\quad u_n = -1 - (-2)^n$

c. $\begin{cases} u_0 = 1, \quad u_1 = 0 \\ u_{n+2} = -2(u_{n+1} + u_n) \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$ $\quad u_n = (\sqrt{2})^n \left(\cos\left(\dfrac{3\pi}{4}n\right) + \sin\left(\dfrac{3\pi}{4}n\right)\right)$

4. Établir les variations et la convergence éventuelle des suites réelles suivantes :

a. $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = -u_n^2 + 3u_n - 2 \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = -u_n^2 + 2u_n - 2$; or $\forall x \in \mathbb{R}, -x^2 + 2x - 2 < 0$ $(\Delta < 0)$ donc la suite est décroissante.

D'après le théorème du point fixe, si (u_n) converge vers l, on a : $-l^2 + 2l - 2 = 0$; cette équation n'admettant pas de solution réelle, on en déduit que (u_n) diverge et, comme elle est décroissante, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

b. $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k}$, pour $n \geq 1$

On remarque que la suite est composée de termes strictement positifs. On a :

$\forall n \geq 1, \quad 0 < \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \underbrace{=}_{\text{télescopage}} \dfrac{2n+1}{2n+2} \leq 1$; on en déduit que la suite est décroissante.

Comme elle est positive, elle est minorée par 0 donc, d'après le théorème de convergence monotone, elle converge.

5. On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} : \quad u_{n+1} = \frac{3}{2+u_n^2}$$

a. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_n \leq 2$.

La fonction $f : x \mapsto \dfrac{3}{2+x^2}$ est décroissante sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.

$u_0 \in [0;2]$;

$\forall n \in \mathbb{N}, (0 \leq u_n \leq 2) \Rightarrow (f(2) \leq f((u_n) \leq f(0)) \Rightarrow \left(0 \leq \dfrac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq \dfrac{3}{2} \leq 2\right)$.

Par principe de récurrence, on a donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0;2]$.

b. Établir la convergence des suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}).

La fonction f étant décroissante sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, la fonction $f \circ f$ est croissante de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$. Ainsi, les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont des suites monotones. On a montré à la question précédente qu'elles sont bornées, elles sont donc convergentes, d'après le théorème de convergence monotone.

c. En admettant que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 2x^5 - 3x^4 + 8x^3 - 12x^2 + 17x - 12 = (x-1)(x^2+x+3)(2x^2-3x+4)$$

déduire des questions précédentes la convergence de la suite (u_n) ainsi que sa limite.

Les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers un point fixe de la fonction $f \circ f$ (qui est continue).

On a : $(f \circ f(x) = x) \Leftrightarrow (2x^5 - 3x^4 + 8x^3 - 12x^2 + 17x - 12 = 0) \Leftrightarrow (x = 1)$, d'après la factorisation donnée.

Ainsi (u_{2n}) et (u_{2n+1}) admettent la même limite égale à 1. On en déduit que la suite (u_n) converge vers 1.