CB n°5 - Primitives - Équations différentielles linéaires - Sujet 1

1. Calculer l'intégrale suivante, à l'aide du changement de variable $x = \sqrt{3\mathrm{e}^t - 1}$:

$$\int_{\ln\left(\frac{1}{3}\right)}^{\ln\left(\frac{2}{3}\right)} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{3\mathrm{e}^t - 1}}$$

On a : $x = \sqrt{3\mathrm{e}^t - 1} \Rightarrow x^2 + 1 = 3\mathrm{e}^t$ et $\mathrm{d}x = \dfrac{3\mathrm{e}^t}{2\sqrt{3\mathrm{e}^t - 1}}\mathrm{d}t \Rightarrow \mathrm{d}t = \dfrac{2x}{1+x^2}\mathrm{d}x$ d'où :

$\displaystyle\int_{\ln\left(\frac{1}{3}\right)}^{\ln\left(\frac{2}{3}\right)} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{3\mathrm{e}^t - 1}} = \int_0^1 \frac{2}{1+x^2}\mathrm{d}x = 2\left[\mathrm{Arctan}(x)\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}$

2. Résoudre les équations différentielles suivantes sur l'intervalle I précisé :

a. $y'' - 4y' + 3y = x\mathrm{e}^x$ pour $I = \mathbb{R}$

$$S = \left\{x \mapsto A\mathrm{e}^{3x} + \left(-\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x + B\right)\mathrm{e}^x, (A,B) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

b. $(1+x^2)y' + 2xy = \dfrac{1}{x}$ pour $I = \mathbb{R}_+^*$

$$S = \left\{x \mapsto \frac{C + \ln(x)}{1+x^2}, C \in \mathbb{R}\right\}$$

3. Résoudre le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y'' + 4y' + 4y = 3x + 1 \\ y(0) = -\dfrac{1}{2} \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

$$S = \left\{x \mapsto -\frac{3}{4}x\mathrm{e}^{-2x} + \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}\right\}$$

CB n°5 - Primitives - Équations différentielles linéaires - Sujet 2

1. Calculer l'intégrale suivante, à l'aide du changement de variable $x = \sqrt{2e^t - 1}$:

$$\int_0^{\ln(2)} \frac{dt}{\sqrt{2e^t - 1}}$$

On a : $x = \sqrt{2e^t - 1} \Rightarrow x^2 + 1 = 2e^t$ et $dx = \dfrac{e^t}{\sqrt{2e^t - 1}}dt \Rightarrow dt = \dfrac{2x}{1 + x^2}dx$ d'où :
$\displaystyle\int_0^{\ln(2)} \frac{dt}{\sqrt{2e^t - 1}} = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{2}{1 + x^2}dx = 2\left[\mathrm{Arctan}(x)\right]_1^{\sqrt{3}} = 2\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6}$

2. Résoudre les équations différentielles suivantes sur l'intervalle I précisé :

a. $y'' - y = (x + 2)e^{-x}$ pour $I = \mathbb{R}$

$$S = \left\{x \mapsto Ae^x + \left(-\frac{1}{4}x^2 - \frac{5}{4}x + B\right)e^{-x}, (A, B) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

b. $(1 + e^x)y' + e^x y = \dfrac{1}{x^2}$ pour $I = \mathbb{R}_+^*$

$$S = \left\{x \mapsto \frac{C - \frac{1}{x}}{1 + e^x}, C \in \mathbb{R}\right\}$$

3. Résoudre le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y'' - 2y' + y = x^2 - 1 \\ y(0) = 5 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$$

$$S = \left\{x \mapsto -2xe^x + x^2 + 4x + 5\right\}$$