CB n°2 - Calcul algébrique - Trigonométrie - Sujet 1

1. Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x+2y-z=1 \\ 2x-y+2z=2 \\ x+7y-5z=1 \end{cases} \qquad S=\left\{\left(1-\frac{3}{5}z;\frac{4}{5}z;z\right), z\in\mathbb{R}\right\}$$

2. q désigne un réel différent de 1 et n un entier naturel non nul.

a. Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=i}^{n}q^k=\sum_{k=1}^{n}kq^k$.

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=i}^{n}q^k=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{k}q^k=\sum_{k=1}^{n}q^k\sum_{i=1}^{k}1=\sum_{k=1}^{n}q^kk$$

b. En déduire $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}kq^k$.

On remarque tout d'abord que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}kq^k=\sum_{k=1}^{n}kq^k$. Le résultat précédent donne :

$$\sum_{k=0}^{n}kq^k=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=i}^{n}q^k=\sum_{i=1}^{n}q^i\frac{1-q^{n+1-i}}{1-q}=\sum_{i=1}^{n}=\frac{1}{1-q}\left(\sum_{i=1}^{n}q^i-\sum_{i=1}^{n}q^{n+1}\right)=\frac{1}{1-q}\left(q\frac{1-q^n}{1-q}-nq^{n+1}\right)$$

3. Soit $n\in\mathbb{N}$. En remarquant que pour $k\in\mathbb{N}, k=(k+1)-1$, calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k\cdot k!$.

$$\sum_{k=0}^{n}k\cdot k!=\sum_{k=0}^{n}((k+1)-1)\cdot k!=\sum_{k=0}^{n}((k+1)\cdot k!-k!)=\sum_{k=0}^{n}((k+1)!-k!)\underset{\text{télescopage}}{=}(n+1)!-1$$

4. Résoudre dans $\mathbb{R}$:

a. $\cos(2x)-\sin(x)=0$

$$\Leftrightarrow 1-2\sin^2(x)-\sin(x)=0\Leftrightarrow \sin(x)\in\left\{\frac{1}{2},-1\right\}\Leftrightarrow x\in\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left\{\frac{\pi}{6}+2k\pi;\frac{5\pi}{6}+2k\pi;-\frac{\pi}{2}+2k\pi\right\}$$

b. $\cos(x)-\sin(x)=1$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1\Leftrightarrow\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow x\in\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left\{2k\pi;-\frac{\pi}{2}+2k\pi\right\}$$

c. $\cos(x)\geq\frac{1}{2}$ $\quad\Leftrightarrow x\in\displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left[-\frac{\pi}{3}+2k\pi;\frac{\pi}{3}+2k\pi\right]$

5. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a. $\sqrt{x^2+x-6}<x-1$ $\qquad S=\left[2;\frac{7}{3}\right[$

b. $|x^2+x|\leq 2$ $\qquad S=[-2;1]$

c. $\dfrac{2x+1}{m-1}\leq mx$ $\quad\Leftrightarrow\dfrac{m^2-m-2}{m-1}x-\dfrac{1}{m-1}\geq 0$ $\qquad$ où m désigne un paramètre réel différent de 1.

$\rightsquigarrow$ Si $m\in]-\infty;-1[\cup]1;2[$, $\qquad S=\left]-\infty;\dfrac{1}{(m-2)(m+1)}\right]$

$\rightsquigarrow$ Si $m\in]-1;1[\cup]2;+\infty[$, $\qquad S=\left[\dfrac{1}{(m-2)(m+1)};+\infty\right[$

$\rightsquigarrow$ Si $m=-1$, $\qquad S=\mathbb{R}$

$\rightsquigarrow$ Si $m=2$, $\qquad S=\varnothing$

CB N°2 - Calcul algébrique -Trigonométrie - Sujet 2

1. Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 2x-3y+z=0 \\ 3x-2y+z=1 \\ x-4y+z=-1 \end{cases} \qquad S=\{(1-y;y;5y-2)\,,y\in\mathbb{R}\}$$

2. q désigne un réel différent de 1 et n un entier naturel non nul.

a. En remarquant que pour $k\in\mathbb{N}^*, k=\sum_{i=1}^{k}1$, montrer que $\sum_{k=0}^{n}kq^k=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=i}^{n}q^k$.

$$\sum_{k=0}^{n}kq^k=\sum_{k=1}^{n}kq^k=\sum_{k=0}^{n}q^k\sum_{i=1}^{k}1=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=i}^{n}q^k \qquad \text{en intervertissant les sommes.}$$

b. En déduire $\sum_{k=0}^{n}kq^k$.

$$\sum_{k=0}^{n}kq^k=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=i}^{n}q^k=\sum_{i=1}^{n}q^i\frac{1-q^{n+1-i}}{1-q}=\sum_{i=1}^{n}=\frac{1}{1-q}\left(\sum_{i=1}^{n}q^i-\sum_{i=1}^{n}q^{n+1}\right)=\frac{1}{1-q}\left(q\frac{1-q^n}{1-q}-nq^{n+1}\right)$$

3. Soit $n\in\mathbb{N}$. En remarquant que pour $k\in\mathbb{N}, k=(k+1)-1$, calculer $\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{(k+1)!}$.

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{(k+1)!}=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k+1}{(k+1)!}-\frac{1}{(k+1)!}\right)=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+1)!}\right)\underset{\text{télescopage}}{=}1-\frac{1}{(n+1)!}$$

4. Résoudre dans $\mathbb{R}$:

a. $\cos(2x)-\sin(2x)=0$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}+2x\right)=0\Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z}, 2x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi\Leftrightarrow x\in\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left\{\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}\right\}$$

b. $\cos(2x)+\sin(x)=1$

$$\Leftrightarrow 1-2\sin^2(x)+\sin(x)=1\Leftrightarrow \sin(x)(1-2\sin(x))=0\Leftrightarrow \sin(x)=0\vee\sin(x)=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x\in\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left\{k\pi;\frac{\pi}{6}+2k\pi;\frac{5\pi}{6}+2k\pi\right\}$$

c. $\sin(x)\geq\frac{1}{2}$ $\qquad \Leftrightarrow x\in\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left[\frac{\pi}{6}+2k\pi;\frac{5\pi}{6}+2k\pi\right]$

5. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a. $1+3x<\sqrt{-2x^2+x+1}$ $\qquad S=\left[-\frac{1}{2};0\right[$

b. $|2x^2+3x-1|\leq 1$ $\qquad S=\left[-2;-\frac{3}{2}\right]\cup\left[0;\frac{1}{2}\right]$

c. $\frac{2x+1}{m+1}\leq mx \quad \Leftrightarrow \frac{m^2-m-2}{m+1}x-\frac{1}{m+1}\geq 0$ $\qquad$ où m désigne un paramètre réel différent de -1.

$\rightsquigarrow$ Si $m\in]-\infty;-2[\cup]-1;1[$, $\qquad S=\left]-\infty;\frac{1}{(m+2)(m-1)}\right]$

$\rightsquigarrow$ Si $m\in]-2;-1[\cup]1;+\infty[$, $\qquad S=\left[\frac{1}{(m+2)(m-1)};+\infty\right[$

$\rightsquigarrow$ Si $m=-2$, $\qquad S=\mathbb{R}$

$\rightsquigarrow$ Si $m=1$, $\qquad S=\varnothing$