CB n°1 - Raisonnement - Vocabulaire ensembliste - Sujet 1

1. Questions de cours

a. A l'aide d'une table de vérité, démontrer que

$$\urcorner(\mathbf{P} \Rightarrow \mathbf{Q}) \Leftrightarrow (\mathbf{P} \wedge \urcorner \mathbf{Q})$$

b. Montrer que la composée de deux injections est une injection.

2a. Soit $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Donner la signification puis la négation de l'assertion suivante :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, (x < y) \Rightarrow (f(x) < f(y))$$

b. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique.
Traduire à l'aide de quantificateurs le fait que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée.

3. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\left\{\begin{array}{l} u_0 = 1, u_1 = 3 \\ u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{array}\right.$
Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = 2^n \left(1 + \frac{n}{2}\right)$$

4. a désigne un entier. Montrer que si a^2 est un multiple de 16 alors $\dfrac{a}{2}$ est un entier pair.

5. Soit $f : (x; y) \mapsto (x + 3y; x - 5y)$.
Montrer que f est bijective de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ et déterminer sa fonction réciproque.

6. I et J désignent des parties de $\mathbb{R}$. On considère la fonction f suivante :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} I & \to & J \\ x & \mapsto & \ln(x^2 - 3x) \end{array}\right.$$

Déterminer des ensembles I et J, pour lesquels f est bijective.

CB n°1 - Raisonnement - Vocabulaire ensembliste - Sujet 2

1. Questions de cours

a. A l'aide d'une table de vérité, démontrer que

$$(\mathbf{P} \Rightarrow \mathbf{Q}) \Leftrightarrow (\rceil \mathbf{P} \vee \mathbf{Q})$$

b. Montrer que la composée de deux surjections est une surjection.

2a. Soit $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Donner la signification puis la négation de l'assertion suivante :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, (x < y) \Rightarrow (f(x) > f(y))$$

b. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique.
Traduire à l'aide de quantificateurs le fait que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas minorée.

3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels positifs telle que $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1}^2 = u_1 + u_2 + \cdots + u_n, \quad \forall n \geq 1 \end{cases}$
Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n \geq \frac{n}{4}$$

4. a désigne un nombre entier.
Montrer que si a^2 n'est pas un multiple de 16 alors $\dfrac{a}{2}$ n'est pas un entier pair.

5. Soit $f : x \mapsto \dfrac{2x+3}{4x-1}$. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{1}{4}\right\}$ dans un ensemble I à définir, et exprimer sa fonction réciproque.

6. I et J désignent des parties de $\mathbb{R}$. On considère la fonction f suivante :

$$f : \left| \begin{array}{lcl} I & \to & J \\ x & \mapsto & \sqrt{4x^2 - 9} \end{array} \right.$$

Déterminer des ensembles I et J, pour lesquels f est bijective.