CB n°6 - Suites numériques - Sujet 1

1. Questions de cours

Montrer que si (u_n) et (v_n) sont des suites réelles telles que pour $n \geq n_0, u_n \leq v_n$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

2. Établir la limite des suites suivantes, et justifier la réponse :

a. $u_n = \dfrac{\sin(n^2)}{n^2}$ **b.** $v_n = n^2 \sin\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ **c.** $w_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{-k}$ **d.** $x_n = \sqrt{n^3+n} - n\sqrt{n}$

3. Expliciter les suites suivantes en fonction de n :

a. $\begin{cases} u_0 = 0, \quad u_1 = 1 \\ u_{n+2} = 4u_{n+1} - 3u_n \qquad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$ **b.** $\begin{cases} u_0 = 1, \quad u_1 = 0 \\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - 2u_n \qquad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

4. Établir les variations et la limite éventuelle des suites suivantes :

a. $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$ **b.** $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1}{2}(u_n^2+7)} + 3 \qquad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

5. On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$u_0 = -1, \quad v_0 = 2, \qquad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} : \quad \begin{cases} u_{n+1} = 4u_n - 2v_n \\ v_{n+1} = 3v_n - 3u_n \end{cases}$$

a. Montrer que $(u_n + v_n)_n$ est une suite constante.

b. En déduire que la suite (u_n) est arithmetico-géométrique.

c. Expliciter u_n et v_n en fonction de n.

d. Expliciter $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ en fonction de n.

CB n°6 - Suites numériques - Sujet 2

1. Questions de cours

Montrer que si $(u_n),(v_n)$ et (w_n) sont des suites telles que pour $n \geq n_0, u_n \leq v_n \leq w_n$ et si de plus $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = l \in \mathbb{R}$ alors (v_n) converge vers l.

2. Établir la limite des suites suivantes, et justifier la réponse :

a. $u_n = \dfrac{1-\cos(n^2)}{n^2}$ **b.** $v_n = n^2\left(1-\cos\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right)$ **c.** $w_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2^{-k}$ **d.** $x_n = n\sqrt{n^2+n}-n^2$

3. Expliciter les suites suivantes en fonction de n :

a. $\begin{cases} u_0 = 1, \quad u_1 = 0 \\ u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n \qquad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$ **b.** $\begin{cases} u_0 = 1, \quad u_1 = 0 \\ u_{n+2} = -2u_{n+1} - 4u_n \qquad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

4. Établir les variations et la limite éventuelle des suites suivantes :

a. $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \qquad \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$ **b.** $\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{u_n^2+1} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

5. On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$u_0 = 1, \quad v_0 = 2, \qquad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} : \quad \begin{cases} u_{n+1} = 3u_n + 2v_n \\ v_{n+1} = 2u_n + 3v_n \end{cases}$$

a. Montrer que $(u_n - v_n)_n$ est une suite constante.

b. En déduire que la suite (u_n) est arithmetico-géométrique.

c. Expliciter u_n et v_n en fonction de n.

d. Expliciter $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ en fonction de n.