CB n°1 - Raisonnement - Vocabulaire ensembliste - Sujet 1

1. Questions de cours

Compléter avec l'un des symboles $\subset, \supset$ ou $=$, puis démontrer le résultat :

$$f(f^{-1}(A)) \qquad A \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad f^{-1}(f(A)) \qquad A$$

2. Soit $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Donner la signification puis la négation de l'assertion suivante :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad ((f(x) = f(y)) \Rightarrow (x = y))$$

3. Soient $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, (a,b) \in \mathbb{R}^2, (r,\varepsilon) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$.
Donner la contraposée puis la négation de l'assertion suivante :

$$|a-b| \leq r \Rightarrow |f(a) - f(b)| \leq \varepsilon$$

4. (u_n) désigne une suite réelle ; traduire à l'aide de quantificateurs les expressions suivantes :

a. (u_n) est une suite bornée ;

b. (u_n) n'est pas croissante ;

5. A, B et C désignent des ensembles. Montrer que

$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$$

6. Étudier l'injectivité et la surjectivité des applications suivantes (justifier la réponse, éventuellement à l'aide d'une figure) :

a. $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 + 2x \end{array} \right.$

b. $g : \left| \begin{array}{ccc} [0, 2\pi] & \to & [-1, 1] \\ x & \mapsto & \cos\left(\dfrac{x}{2}\right) \end{array} \right.$

c. $h : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & xy \end{array} \right.$

CB n°1 - Raisonnement - Vocabulaire ensembliste - Sujet 2

1. Questions de cours

Compléter avec l'un des symboles $\subset, \supset$ ou $=$, puis démontrer le résultat :

$$f(A \cap B) \qquad f(A) \cap f(B) \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad f(A \cup B) \qquad f(A) \cup f(B)$$

2. Soit $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Donner la signification puis la négation de l'assertion suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, f(y) = x$$

3. Soient (u_n) une suite réelle, $n_0 \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.
Donner la contraposée puis la négation de l'assertion suivante :

$$n \geq n_0 \Rightarrow |u_n| < \varepsilon$$

4. (u_n) désigne une suite réelle ; traduire à l'aide de quantificateurs les expressions suivantes :

a. (u_n) n'est pas constante ;

b. (u_n) n'est pas décroissante ;

5. A, B et C désignent des ensembles. Montrer que

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$$

6. Étudier l'injectivité et la surjectivité des applications suivantes (justifier la réponse, éventuellement à l'aide d'une figure) :

a. $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 - x \end{array} \right.$

b. $g : \left| \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & [-1,1] \\ x & \mapsto & \sin(2\pi x) \end{array} \right.$

c. $h : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x^2 + y^2 \end{array} \right.$