CB n°11 - Applications linéaires - Sujet 1

1. Les applications suivantes sont-elles des applications linéaires ? (Justifier la réponse).
Lorsqu'elles le sont, en donner la matrice dans les bases canoniques, puis en déterminer le noyau et l'image.

a. $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (x-y, 2x+y, xy) \end{array} \right.$

b. $g : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, x+2y, x+3y) \end{array} \right.$

c. $h : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \mapsto & P(0)+P(1)X+P(2)X^2 \end{array} \right.$

2. Soit $E = \mathbb{R}^3$. On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ sa base canonique.
On considère la famille $\mathscr{B}' = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ telle que

$$\varepsilon_1 = e_1 + e_2, \quad \varepsilon_2 = 3e_1 + e_2 - e_3, \quad \varepsilon_3 = e_1 + e_2 + e_3$$

et $f \in \mathscr{L}(E)$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

b. Montrer que $\mathscr{B}'$ est une base de E.

c. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathscr{B}'$.

3. Déterminer la nature de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice M suivante, ainsi que ses éléments caractéristiques :

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

CB n°11 - Applications linéaires - Sujet 2

1. Les applications suivantes sont-elles des applications linéaires ? (Justifier la réponse).
Lorsqu'elles le sont, en donner la matrice dans les bases canoniques, puis en déterminer le noyau et l'image.

a. $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x-2y+z, x+3y+z, x-y+1) \end{array} \right.$

b. $g : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+y+z, x-y) \end{array} \right.$

c. $h : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \mapsto & P+P'+P'' \end{array} \right.$

2. Soit $E = \mathbb{R}^3$. On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ sa base canonique.
On considère la famille $\mathscr{B}' = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ telle que

$$\varepsilon_1 = e_1 + e_2, \quad \varepsilon_2 = -e_1 + e_3, \quad \varepsilon_3 = e_1 + e_2 + e_3$$

et $f \in \mathscr{L}(E)$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 5 & -3 \\ -3 & 6 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

b. Montrer que $\mathscr{B}'$ est une base de E.

c. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathscr{B}'$.

3. Déterminer la nature de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice M suivante, ainsi que ses éléments caractéristiques :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & -3 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$