CB N°9 - ESPACES VECTORIELS - SUJET 1

1. Les ensembles suivants sont-ils des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels ? Si oui, en donner une base.

a. $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + y = x - z\}$

b. $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x^2 + y^2 = 0\}$

c. $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ xyz = 0\}$

d. $H = \{P \in \mathbb{R}_3[X],\ P(1) = 1\}$

2. Déterminer un supplémentaire des sous-espaces vectoriels suivants, et justifier la réponse :

a. $A = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + y + z = 0\big\}$

b. $B = \big\{P \in \mathbb{R}_2[X],\ P'(0) = 0\big\}$

3. On considère dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs suivants :

$$u = (2; -1; 1), \quad v = (1; 0; -1), \quad w = (1; -1; 2), \quad x = (1; 1; 1), \quad y = (0; 2; -1)$$

On note $E = \text{Vect}\{u, v, w\}$ et $F = \text{Vect}\{x, y\}$.

a. Quelles sont les dimensions de E et F ?

b. Déterminer une base de $E + F$.

c. Déterminer une base de $E \cap F$.

CB N°9 - ESPACES VECTORIELS - SUJET 2

1. Les ensembles suivants sont-ils des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels ? Si oui, en donner une base.

a. $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + 2 = 0\}$

b. $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x^2 - y^2 = 0\}$

c. $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ (x = 0) \wedge (y = 0)\}$

d. $H = \big\{P \in \mathbb{R}_3[X],\ P(1) = P'(1) = 0\big\}$

2. Déterminer un supplémentaire des sous-espaces vectoriels suivants, et justifier la réponse :

a. $A = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x = 0\big\}$

b. $B = \{P \in \mathbb{R}_2[X],\ P(0) = 0\}$

3. On considère dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs suivants :

$$u = (-1; 1; 1), \quad v = (2; 0; 1), \quad w = (1; 1; 2), \quad x = (0; 0; 1), \quad y = (1; 1; 1)$$

On note $E = \text{Vect}\{u, v, w\}$ et $F = \text{Vect}\{x, y\}$.

a. Quelles sont les dimensions de E et F ?

b. Déterminer une base de $E + F$.

c. Déterminer une base de $E \cap F$.