CB N°9 - ESPACES VECTORIELS - SUJET 1

1. Les ensembles suivants sont-ils des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels ? Si oui, en donner une base.

a. $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + y = x - z\} = \text{Vect}\{(1; 0; 0), (0; 1; -1)\}$

b. $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x^2 + y^2 = 0\} = \text{Vect}\{(0; 0; 1)\}$

c. $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ xyz = 0\}$
Non, car $(1, 0, 0) \in G$ et $(0, 1, 1) \in G$ mais $(1, 0, 0) + (0, 1, 1) = (1, 1, 1) \notin G$.

d. $H = \{P \in \mathbb{R}_3[X],\ P(1) = 1\}$
Non, car $0 \notin H$.

2. Déterminer un supplémentaire des sous-espaces vectoriels suivants, et justifier la réponse :

a. $A = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + y + z = 0\right\} = \text{Vect}\{(1; -1; 0), (1; 0; -1)\}$
$\dim(A) = 2$ donc un supplémentaire de A est de dimension 1.
$(1; 0; 0) \notin A$ donc $\text{Vect}\{(1; 0; 0)\}$ est un supplémentaire de A.

b. $B = \left\{P \in \mathbb{R}_2[X],\ P'(0) = 0\right\} = \text{Vect}\{1, X^2\}$
$\text{Vect}\{X\}$ est un supplémentaire de B car $\{1, X, X^2\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

3. On considère dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs suivants :

$$u = (2; -1; 1), \quad v = (1; 0; -1), \quad w = (1; -1; 2), \quad x = (1; 1; 1), \quad y = (0; 2; -1)$$

On note $E = \text{Vect}\{u, v, w\}$ et $F = \text{Vect}\{x, y\}$.

a. Quelles sont les dimensions de E et F ?
$w = u - v$ donc $\{u, v, w\}$ est liée ; u et v n'étant pas colinéaires, la famille $\{u, v\}$ est donc libre et constitue une base de E qui est donc de dimension 2.
x et y n'étant pas colinéaires, la famille $\{x, y\}$ est donc libre et constitue une base de F qui est donc de dimension 2.

b. Déterminer une base de $E + F$.
$E + F = \text{Vect}\{u, v, x, y\}$. Or on est dans un espace-vectoriel ($\mathbb{R}^3$) de dimension 3, donc la dimension de $E + F$ est au plus 3. On cherche le rang de $\{u, v, x\}$:
$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$ donc $\text{rg}\{u, v, x\} = 3$ donc $E + F = \mathbb{R}^3$ et toute base de $\mathbb{R}^3$ répond à la question posée.

c. Déterminer une base de $E \cap F$.
D'après la formule de Grassman, $\dim(E \cap F) = \dim(E) + \dim(F) - \dim(E + F) = 1$.
$x - y = w \in E \cap F$ donc $E \cap F = \text{Vect}\{w\}$.

CB n°9 - Espaces vectoriels - Sujet 2

1. Les ensembles suivants sont-ils des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels ? Si oui, en donner une base.

a. $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + 2 = 0\}$
Non, car $(0, 0, 0) \notin E$.

b. $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x^2 - y^2 = 0\}$
Non, car $(1, 1, 0) \in F$ et $(1, -1, 0) \in F$ mais $(1, 1, 0) + (1, -1, 0) = (2, 0, 0) \notin F$.

c. $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ (x = 0) \wedge (y = 0)\} = \text{Vect}\{(0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$

d. $H = \left\{P \in \mathbb{R}_3[X],\ P(1) = P'(1) = 0\right\}$ $\text{Vect}\{(X-1)^2, X(X-1)^2\}$

2. Déterminer un supplémentaire des sous-espaces vectoriels suivants, et justifier la réponse :

a. $A = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x = 0\right\} = \text{Vect}\{(0; 1; 0), (0; 0; 1)\}$
$\text{Vect}\{(1; 0; 0)\}$ est un supplémentaire de A car $\{(0; 1; 0), (0; 0; 1), (1; 0; 0)\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

b. $B = \{P \in \mathbb{R}_2[X],\ P(0) = 0\} = \text{Vect}\{X, X^2\}$
$\text{Vect}\{X^0\}$ est donc un supplémentaire de B car $\text{Vect}\{X^0, X, X^2\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

3. On considère dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs suivants :

$$u = (-1; 1; 1), \quad v = (2; 0; 1), \quad w = (1; 1; 2), \quad x = (0; 0; 1), \quad y = (1; 1; 1)$$

On note $E = \text{Vect}\{u, v, w\}$ et $F = \text{Vect}\{x, y\}$.

a. Quelles sont les dimensions de E et F ?
$w = u + v$ donc la famille $\{u, v, w\}$ est liée ; u et v n'étant pas colinéaires, la famille $\{u, v\}$ est donc libre et constitue une base de E qui est donc de dimension 2.
x et y n'étant pas colinéaires, la famille $\{x, y\}$ est donc libre et constitue une base de F qui est donc de dimension 2.

b. Déterminer une base de $E + F$. $E + F = \text{Vect}\{u, v, x, y\}$. Or on est dans un espace-vectoriel ($\mathbb{R}^3$) de dimension 3, donc la dimension de $E + F$ est au plus 3. On cherche le rang de $\{u, v, x\}$:
$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ donc $\text{rg}\{u, v, x\} = 3$ donc $E + F = \mathbb{R}^3$ et toute base de $\mathbb{R}^3$ répond à la question posée.

c. Déterminer une base de $E \cap F$.
D'après la formule de Grassman, $\dim(E \cap F) = \dim(E) + \dim(F) - \dim(E + F) = 1$.
$x + y = w \in E \cap F$ donc $E \cap F = \text{Vect}\{w\}$.