CB n°8 - Analyse asymptotique - Sujet 1

1. Déterminer la limite en 0 des fonctions suivantes :

a. $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{\ln(1+x)}$ $\quad f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{\frac{1}{2}x^2}{x} \Longrightarrow \lim\limits_{0} f = 0$

b. $g : x \mapsto \dfrac{\sqrt{\cos(x)}-1}{e^{x^2}-1}$ $\quad g(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{-\frac{1}{4}x^2}{x^2} \Longrightarrow \lim\limits_{0} g = -\dfrac{1}{4}$

2. Déterminer le développement limité au voisinage de 0 à l'ordre 3 des fonctions suivantes :

a. $u : x \mapsto \dfrac{\operatorname{ch}(x)-\cos(x)}{x\sin(x)}$ $\quad u(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + \dfrac{1}{6}x^2 + o(x^3)$

b. $v : x \mapsto \ln(\cos(x)+e^x)$ $\quad v(x) \underset{x\to 0}{=} \ln(2) + \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{8}x^2 + \dfrac{1}{8}x^3 + o(x^3)$

c. $w : x \mapsto e^{\sqrt{1+x}}$ $\quad w(x) \underset{x\to 0}{=} e\left(1 + \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{48}x^3\right) + o(x^3)$

3. Déterminer le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de $\dfrac{\pi}{6}$ de la fonction

$h : x \mapsto \operatorname{Arctan}(2\sin(x))$ $\quad h(x) \underset{x\to\frac{\pi}{6}}{=} \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right) - \left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)^2 + o\left(\left(\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)^2\right)\right)$

Par la formule de Taylor -Young : $h(x) \underset{x\to\frac{\pi}{6}}{=} h\left(\dfrac{\pi}{6}\right) + h'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right) + \dfrac{h''\left(\frac{\pi}{6}\right)}{2}\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)^2 + o\left(\left(\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)^2\right)\right)$

CB n°8 - Analyse asymptotique - Sujet 2

1. Déterminer la limite en 0 des fonctions suivantes :

a. $f : x \mapsto \dfrac{x\sin(x)}{1-\cos(x)}$ $\quad f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^2}{\frac{1}{2}x^2} \Longrightarrow \lim\limits_{0} f = 2$

b. $g : x \mapsto \dfrac{e^{\sqrt{1+\sin(x)}}-e}{\tan(x)}$ $\quad g(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{e\times\frac{1}{2}x}{x} \Longrightarrow \lim\limits_{0} g = \dfrac{e}{2}$

2. Déterminer le développement limité au voisinage de 0 à l'ordre indiqué des fonctions suivantes :

a. $u : x \mapsto \dfrac{e^x-\cos(x)-x}{x-\ln(1+x)}$ à l'ordre 2 $\quad u(x) \underset{x\to 0}{=} 2 + \dfrac{5}{3}x + \dfrac{1}{9}x^2 + o(x^2)$

b. $v : x \mapsto \ln(\cos(x)+\cos(2x))$ à l'ordre 4 $\quad v(x) \underset{x\to 0}{=} \ln(2) - \dfrac{5}{4}x^2 - \dfrac{41}{96}x^4 + o(x^4)$

c. $w : x \mapsto \ln\left(\dfrac{\sin(x)}{x}\right)$ à l'ordre 4 $\quad w(x) \underset{x\to 0}{=} -\dfrac{1}{6}x^2 - \dfrac{1}{180}x^4 + o(x^4)$

3. Déterminer le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de $\dfrac{\pi}{3}$ de la fonction

$h : x \mapsto \operatorname{Arctan}(2\cos(x))$ $\quad h(x) \underset{x\to\frac{\pi}{3}}{=} \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right) - \left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)^2 + o\left(\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)^2\right)$

Par la formule de Taylor -Young : $h(x) \underset{x\to\frac{\pi}{3}}{=} h\left(\dfrac{\pi}{3}\right) + h'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right) + \dfrac{h''\left(\frac{\pi}{3}\right)}{2}\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)^2 + o\left(\left(\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)^2\right)\right)$