CB n°7 - Matrices - Systèmes linéaires - Sujet 1

1. Résoudre les systèmes suivants :

a. $\begin{cases} 3x + y + z = 2 \\ x + y - 2z = -2 \\ 2x + 3y - 4z = -1 \end{cases}$ $\quad S = \{(-1, 3, 2)\}$

b. $\begin{cases} x - 2y + z - t = 3 \\ 3x + y + 2z - 2t = 1 \\ 2x + y + z + 4t = 1 \\ 3x + 6y + z + 4t = -4 \end{cases}$ $\quad S = \left\{ \left(\frac{5}{2} - \frac{25}{2}t, -\frac{3}{2} + \frac{5}{2}t, -\frac{5}{2} + \frac{37}{2}t, t \right), t \in \mathbb{R} \right\}$

2. Résoudre le système suivant en discutant suivant les valeurs du paramètre a :

$$\begin{cases} x - y = a \\ y - z = 1 \\ z - t = -1 \\ t - x = 2 \end{cases}$$

Si $a \neq -2, \quad S = \varnothing$.
Si $a = -2, \quad S = \{(t-2, t, t-1, t), t \in \mathbb{R}\}$.

3. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a. Déterminer A^{-1} $\quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b. Calculer $(A - \mathrm{I}_3)^2$. $\quad (A - \mathrm{I}_3)^2 = 0_3$

c. Retrouver A^{-1} à l'aide de la question précédente.
$(A - \mathrm{I}_3)^2 = A^2 - 2A + \mathrm{I}_3 = 0_3$ donc $A(2\mathrm{I}_3 - A) = \mathrm{I}_3$.
On en déduit que $A^{-1} = 2\mathrm{I}_3 - A$ ce qui correspond à la matrice trouvée précédemment.

CB n°7 - Matrices - Systèmes linéaires - Sujet 2

1. Résoudre les systèmes suivants :

a. $\begin{cases} x-y+3z=0 \\ 2x+y+z=1 \\ 3x-y+2z=-3 \end{cases}$ $S=\{(-1,2,1)\}$

b. $\begin{cases} x+2y-z+t=4 \\ 3x-y+5z-t=2 \\ x+2y+2z+4t=1 \\ 7x-7y+17z-5t=-2 \end{cases}$ $S=\left\{\left(\frac{17}{7}+\frac{10}{7}t, \frac{2}{7}-\frac{12}{7}t, -1-t, t\right), t\in\mathbb{R}\right\}$

2. Résoudre le système suivant en discutant suivant les valeurs du paramètre a :

$$\begin{cases} x+y=1 \\ y+z=2 \\ z+t=-1 \\ t+x=a \end{cases}$$

Si $a\neq -2$, $S=\varnothing$.
Si $a=-2$, $S=\{(-2-t, 3+t, -1-t, t), t\in\mathbb{R}\}$.

3. Soit $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a. Déterminer A^{-1}. $A^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b. Calculer $(A-\mathrm{I}_3)^2$. $(A-\mathrm{I}_3)^2=0_3$

c. Retrouver A^{-1} à l'aide de la question précédente.
$(A-\mathrm{I}_3)^2=A^2-2A+\mathrm{I}_3=0_3$ donc $A(2\mathrm{I}_3-A)=\mathrm{I}_3$.
On en déduit que $A^{-1}=2\mathrm{I}_3-A$ ce qui correspond à la matrice trouvée précédemment.