CB n°6 - Suites numériques - Sujet 1

1. Questions de cours

Montrer que si (u_n) et (v_n) sont des suites réelles telles que pour $n \geq n_0, u_n \leq v_n$ avec $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.

2. Etablir la limite des suites suivantes, et justifier la réponse :

a. $u_n = \dfrac{\cos(3n)}{3n}$ **b.** $v_n = n \sin\left(\dfrac{2}{n}\right)$ **c.** $w_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)$ **d.** $x_n = \sqrt{n^2+n} - n$

3. Expliciter les suites suivantes en fonction de n :

a. $\begin{cases} u_0 = u_1 = 1 \\ u_{n+2} = -u_{n+1} - u_n \qquad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$ **b.** $\begin{cases} u_0 = 0, \quad u_1 = 1 \\ u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n \qquad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

4. Etablir les variations et la limite éventuelle des suites suivantes :

a. $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n^2} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$ **b.** $\begin{cases} u_0 \in]0,1] \\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

5. On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$u_0 = 2, \quad v_0 = 1, \qquad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}, \qquad u_n v_n = 2$$

a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - v_{n+1} = \dfrac{(u_n - v_n)^2}{2(u_n + v_n)}$.

b. En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

c. Déterminer leur limite.

CB n°6 - Suites numériques - Sujet 2

1. Questions de cours

Montrer que si $(u_n), (v_n)$ et (w_n) sont des suites telles que pour $n \geq n_0, u_n \leq v_n \leq w_n$ et si de plus $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = l \in \mathbb{R}$ alors (v_n) converge vers l.

2. Etablir la limite des suites suivantes, et justifier la réponse :

a. $u_n = \dfrac{\sin(2n)}{2n}$ **b.** $v_n = n\sin\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ **c.** $w_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k}{k+1}\right)$ **d.** $x_n = \sqrt{n^2+n} - n - 1$

3. Expliciter les suites suivantes en fonction de n :

a. $\begin{cases} u_0 = 1, \quad u_1 = 0 \\ u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n \qquad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$ **b.** $\begin{cases} u_0 = 1, \quad u_1 = 0 \\ u_{n+2} = u_{n+1} - u_n \qquad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

4. Etablir les variations et la limite éventuelle des suites suivantes :

a. $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{u_n^2 + u_n + 1} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$ **b.** $\begin{cases} u_0 \in]0,1] \\ u_{n+1} = u_n + u_n^2 \qquad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

5. On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$u_0 = 1, \quad v_0 = 2, \qquad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}, \qquad u_n v_n = 2$$

a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - v_{n+1} = \dfrac{(u_n - v_n)^2}{2(u_n + v_n)}$.

b. En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

c. Déterminer leur limite.