CB n°6 - Suites numériques - Sujet 1

1. Questions de cours

Montrer que si (u_n) et (v_n) sont des suites réelles telles que pour $n \geq n_0, u_n \leq v_n$ avec $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.

2. Etablir la limite des suites suivantes, et justifier la réponse :

a. $u_n = \dfrac{\cos(3n)}{3n}$

$\forall n > 0, \quad \dfrac{-1}{3n} \leq \dfrac{\cos(3n)}{3n} \leq \dfrac{1}{3n}$; le théorème d'encadrement donne $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

b. $v_n = n \sin\left(\dfrac{2}{n}\right)$

$\forall n > 0, v_n = 2\dfrac{\sin\left(\frac{2}{n}\right)}{\frac{2}{n}}$; or $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 2$

c. $w_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)$

Par télescopage, $w_n = \ln(n+1)$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = +\infty$

d. $x_n = \sqrt{n^2+n} - n$

$\forall n > 0, x_n = \dfrac{n^2+n-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n} = \dfrac{n}{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)} = \dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}$; on en déduit $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = \dfrac{1}{2}$

3. Expliciter les suites suivantes en fonction de n :

a. $\begin{cases} u_0 = u_1 = 1 \\ u_{n+2} = -u_{n+1} - u_n \qquad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$ $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \cos\left(\dfrac{2\pi}{3}n\right) + \sqrt{3}\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}n\right)$

b. $\begin{cases} u_0 = 0, \quad u_1 = 1 \\ u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n \qquad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$ $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2^n - 1$

4. Etablir les variations et la limite éventuelle des suites suivantes :

a. $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n^2} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

Une rapide étude de variations montre que $f : x \mapsto \dfrac{x}{1+x^2}$ est croissante sur $[0,1]$ et $f([0,1]) \subset [0,1]$.
On en déduit que la suite (u_n) est monotone et bornée.
$u_1 < u_0$ donc la suite est décroissante et, comme f est continue sur $[0,1]$, la suite converge vers un réel $L \in [0,1]$ tel que $\dfrac{L}{1+L^2} = L$ c'est-à-dire 0.

b. $\begin{cases} u_0 \in]0,1] \\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

$u_0 > 0$; $\forall n \in \mathbb{N}, \left(u_n > 0 \Rightarrow u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n} > 0\right)$;
par principe de récurrence, la suite (u_n) est donc strictement positive.

$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{u_n} > 0$ donc la suite (u_n) est croissante.
Si elle convergeait, par continuité de la fonction $x \mapsto x + \dfrac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$, la limite L vérifierait $L = L + \dfrac{1}{L}$. On en déduit que la suite (u_n) diverge, et comme elle est croissante, elle admet pour limite $+\infty$.

5. On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$u_0 = 2, \quad v_0 = 1, \qquad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}, \qquad u_n v_n = 2$$

a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - v_{n+1} = \dfrac{(u_n - v_n)^2}{2(u_n + v_n)}$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on a :
$u_{n+1} - v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} - \dfrac{2}{\frac{u_n+v_n}{2}} = \dfrac{(u_n + v_n)^2 - 4 \times 2}{2(u_n + v_n)} = \dfrac{u_n^2 + 2u_n v_n + v_n^2 - 4u_n v_n}{2(u_n + v_n)} = \dfrac{(u_n - v_n)^2}{2(u_n + v_n)}$.

b. En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
$u_0 > 0, v_0 > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \left((u_n > 0 \wedge v_n > 0) \Rightarrow \left(u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} > 0 \wedge v_{n+1} = \dfrac{2}{u_{n+1}} > 0\right)\right)$;
par principe de récurrence, les suites sont donc strictement positives.
On déduit donc de la question précédente que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - v_{n+1} \geq 0$ et comme de plus $u_0 - v_0 \geq 0$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n - v_n \geq 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :
$u_{n+1} - u_n = \dfrac{v_n - u_n}{2} \leq 0$ donc la suite (u_n) est décroissante ;
de plus $v_n = \dfrac{2}{u_n}$ donc, la suite (u_n) étant décroissante et strictement positive, la suite (v_n) est croissante.
Ainsi, pour $n \in \mathbb{N}$, on a : $v_0 \leq v_n \leq u_n \leq u_0$.
La suite (u_n) étant décroissante et minorée par v_0, elle converge vers un réel U ; la suite (v_n) étant croissante et majorée par u_0, elle converge vers un réel V.
Pour $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$ donc, par passage à la limite, $U = V$.
On déduit de ce qui précède que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

c. Déterminer leur limite.
Pour $n \in \mathbb{N}, u_n v_n = 2$ donc par passage à la limite $U^2 = 2$. Comme les suites sont positives, on a $U = \sqrt{2}$.

CB N°6 - Suites numériques - Sujet 2

1. Questions de cours

Montrer que si $(u_n), (v_n)$ et (w_n) sont des suites telles que pour $n \geq n_0, u_n \leq v_n \leq w_n$ et si de plus $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = l \in \mathbb{R}$ alors (v_n) converge vers l.

2. Etablir la limite des suites suivantes, et justifier la réponse :

a. $u_n = \dfrac{\sin(2n)}{2n}$

$\forall n > 0, \quad -\dfrac{1}{2n} \leq \dfrac{\sin(2n)}{2n} \leq \dfrac{1}{2n}$; le théorème d'encadrement donne $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

b. $v_n = n \sin\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$

$\forall n > 0, v_n = \dfrac{1}{n}\dfrac{\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^2}}$; or $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$

c. $w_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k}{k+1}\right)$

Par télescopage, $w_n = -\ln(n+1)$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = -\infty$

d. $x_n = \sqrt{n^2+n} - n - 1$

$\forall n > 0, x_n = \dfrac{n^2+n-(n+1)^2}{\sqrt{n^2+n}+n+1} = \dfrac{-n-1}{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1+\frac{1}{n}\right)} = \dfrac{-1-\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1+\frac{1}{n}}$;

on en déduit $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = -\dfrac{1}{2}$

3. Expliciter les suites suivantes en fonction de n :

a. $\begin{cases} u_0 = 1, \quad u_1 = 0 \\ u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n \qquad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$ $\qquad u_n = (1-n)2^n$

b. $\begin{cases} u_0 = 1, \quad u_1 = 0 \\ u_{n+2} = u_{n+1} - u_n \qquad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$ $\qquad u_n = \cos\left(\dfrac{\pi}{3}n\right) - \dfrac{\sqrt{3}}{3}\sin\left(\dfrac{\pi}{3}n\right)$

4. Etablir les variations et la limite éventuelle des suites suivantes :

a. $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{u_n^2+u_n+1} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

Une rapide étude de variations donne la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2}{x^2+x+1}$ croissante sur $[0, +\infty[$ avec $f\left([0,+\infty[\right) \subset [0,+\infty[$.
On en déduit que la suite (u_n) est monotone.
$u_1 < u_0$ donc la suite est décroissante et minorée par 0 ; ainsi, f étant continue, la suite converge vers un réel L tel que $L = \dfrac{L^2}{L^2+L+1}$ c'est-à-dire 0.

b. $\begin{cases} u_0 \in]0,1] \\ u_{n+1} = u_n + u_n^2 \qquad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = u_n^2 \geq 0$. On en déduit que la suite est croissante.

Si elle convergeait vers une réel L, la fonction $x \mapsto x + x^2$ étant continue, on aurait $L = L + L^2$ donc $L = 0$. Or, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq u_0$ donc par passage à la limite, $L \geq u_0 > 0$.
On en déduit que (u_n) croit vers $+\infty$.

5. On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$u_0 = 1, \quad v_0 = 2, \qquad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}, \qquad u_n v_n = 2$$

a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - v_{n+1} = \dfrac{(u_n - v_n)^2}{2(u_n + v_n)}$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on a :
$u_{n+1} - v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} - \dfrac{2}{\frac{u_n+v_n}{2}} = \dfrac{(u_n + v_n)^2 - 4 \times 2}{2(u_n + v_n)} = \dfrac{u_n^2 + 2u_n v_n + v_n^2 - 4u_n v_n}{2(u_n + v_n)} = \dfrac{(u_n - v_n)^2}{2(u_n + v_n)}$.

b. En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

$u_0 > 0, v_0 > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \left((u_n > 0 \wedge v_n > 0) \Rightarrow \left(u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} > 0 \wedge v_{n+1} = \dfrac{2}{u_{n+1}} > 0\right)\right)$;
par principe de récurrence, les suites sont donc strictement positives.
On déduit donc de la question précédente que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - v_{n+1} \geq 0$ ou encore pour tout $n \in \mathbb{N}^*, u_n - v_n \geq 0$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
$u_{n+1} - u_n = \dfrac{v_n - u_n}{2} \leq 0$ donc la suite (u_n) est décroissante à partir de $n = 1$;
de plus $v_n = \dfrac{2}{u_n}$ donc, la suite (u_n) étant décroissante à partir de $n = 1$ et strictement positive, la suite (v_n) est croissante à partir de $n = 1$.
Ainsi, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $v_1 \leq v_n \leq u_n \leq u_1$.
La suite (u_n) étant décroissante et minorée par v_1, elle converge vers un réel U ; la suite (v_n) étant croissante et majorée par u_1, elle converge vers un réel V.
Pour $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$ donc, par passage à la limite, $U = V$.
On déduit de ce qui précède que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

c. Déterminer leur limite.

Pour $n \in \mathbb{N}, u_n v_n = 2$ donc par passage à la limite $U^2 = 2$. Comme les suites sont positives, on a $U = \sqrt{2}$.