CB N°4 - Fonctions circulaires réciproques - Sujet 1

1. Question de cours : Donner la dérivée de la fonction Arcsin.

2. Calculer :

a. $\text{Arccos}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad = \frac{3\pi}{4}$

b. $\text{Arccos}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{5}\right)\right) \quad = 2\pi - \frac{7\pi}{5} = \frac{3\pi}{5}$

c. $\text{Arcsin}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right) \quad = \text{Arcsin}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}\right)\right) = \frac{5\pi}{12}$

3. Simplifier $\sin^2(\text{Arctan}(x)) \quad = 1 - \cos^2(\text{Arctan}(x)) = 1 - \frac{1}{1+\tan^2(\text{Arctan}(x))} = 1 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2}$

4. Résoudre l'équation

$$\text{Arccos}(2x) = \text{Arcsin}(x)$$

Le domaine de validité de l'équation est $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

Pour $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, SI x est solution de l'équation, ALORS :

$\cos(\text{Arccos}(2x)) = \cos(\text{Arcsin}(x)) \Leftrightarrow 2x = \sqrt{1-x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 1 - x^2 = 4x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{5}}$

RECIPROQUEMENT, pour $x = \frac{1}{\sqrt{5}}$, on a : $\cos(\text{Arccos}(2x)) = \cos(\text{Arcsin}(x))$ et $\text{Arccos}(2x)$ et $\text{Arcsin}(x)$ sont dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ on a donc bien $\text{Arccos}(2x) = \text{Arcsin}(x)$.

Finalement l'ensemble des solutions est $\left\{\frac{1}{\sqrt{5}}\right\}$.

5. Soit f la fonction définie par $f(x) = \text{Arccos}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$.
Donner le domaine de définition et le domaine de dérivabilité de f, puis la dériver.

f est définie pour tout réel $x \neq -1$ tel que :

$\left(\left|\frac{x-1}{x+1}\right| \leq 1\right) \Leftrightarrow (|x-1| \leq |x+1|) \Leftrightarrow \left((x-1)^2 \leq (x+1)^2\right) \Leftrightarrow (x \geq 0)$.

On déduit que le domaine de définition est $\mathbb{R}^+$.

f est dérivable pour tout réel x de son domaine tel que $\left|\frac{x-1}{x+1}\right| \neq 1$.

Comme $x \in \mathbb{R}^+$, on a $x \neq -1$ et :

$\left(\left|\frac{x-1}{x+1}\right| = 1\right) \Leftrightarrow (|x-1| = |x+1|) \Leftrightarrow \left((x-1)^2 = (x+1)^2\right) \Leftrightarrow (x = 0)$.

On en déduit que le domaine de dérivabilité est $\mathbb{R}_+^*$.

$\forall x > 0, f'(x) = \frac{-\frac{(x+1)-(x-1)}{(x+1)^2}}{\sqrt{1 - \frac{(x-1)^2}{(x+1)^2}}} = \frac{-2}{(x+1)^2\sqrt{\frac{4x}{(x+1)^2}}} = \frac{-2}{(x+1)^2\frac{2\sqrt{x}}{|x+1|}} = \frac{-1}{(1+x)\sqrt{x}}$ car $x+1 > 0$.

CB N°4 - Fonctions circulaires réciproques - Sujet 2

1. Question de cours : Donner la dérivée de la fonction Arccos.

2. Calculer :

a. $\text{Arcsin}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\dfrac{\pi}{4}$

b. $\text{Arcsin}\left(\sin\left(\dfrac{3\pi}{5}\right)\right) = \pi - \dfrac{3\pi}{5} = \dfrac{2\pi}{5}$

c. $\text{Arccos}\left(\sin\left(-\dfrac{\pi}{12}\right)\right) = \text{Arccos}\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{12}\right)\right) = \dfrac{7\pi}{12}$

3. Simplifier $\cos\left(2\text{Arctan}(x)\right) = 2\cos^2\left(\text{Arctan}(x)\right) - 1 = \dfrac{2}{1+\tan^2\left(\text{Arctan}(x)\right)} - 1 = \dfrac{2}{1+x^2} - 1 = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$

4. Résoudre l'équation

$$\text{Arccos}(x) = \text{Arcsin}(2x)$$

Le domaine de validité de l'équation est $\left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$.

Pour $x \in \left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$, SI x est solution de l'équation, ALORS :

$\sin(\text{Arccos}(x)) = \sin(\text{Arcsin}(2x)) \Leftrightarrow 2x = \sqrt{1-x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 1 - x^2 = 4x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$

RECIPROQUEMENT, pour $x = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$, on a : $\sin(\text{Arccos}(x)) = \sin(\text{Arcsin}(2x))$ et $\text{Arccos}(x)$ et $\text{Arcsin}(2x)$ sont dans $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ on a donc bien $\text{Arccos}(x) = \text{Arcsin}(2x)$.

Finalement l'ensemble des solutions est $\left\{\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right\}$.

5. Soit f la fonction définie par $f(x) = \text{Arcsin}\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$.

Donner le domaine de définition et le domaine de dérivabilité de f, puis la dériver.

f est définie pour tout réel $x \neq 1$ tel que :

$\left(\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right| \leq 1\right) \Leftrightarrow (|1+x| \leq |1-x|) \Leftrightarrow \left((1+x)^2 \leq (1-x)^2\right) \Leftrightarrow (x \leq 0)$.

On déduit que le domaine de définition est $\mathbb{R}^-$.

f est dérivable pour tout réel x de son domaine tel que $\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right| \neq 1$.

Comme $x \in \mathbb{R}^-$, on a $x \neq 1$ et :

$\left(\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right| = 1\right) \Leftrightarrow (|1+x| = |1-x|) \Leftrightarrow \left((1+x)^2 = (1-x)^2\right) \Leftrightarrow (x = 0)$.

On en déduit que le domaine de dérivabilité est $\mathbb{R}_-^*$.

$\forall x < 0, f'(x) = \dfrac{\frac{(1-x)-(-1)(1+x)}{(1-x)^2}}{\sqrt{1 - \frac{(1+x)^2}{(1-x)^2}}} = \dfrac{2}{(1-x)^2\sqrt{\frac{-4x}{(1-x)^2}}} = \dfrac{2}{(1-x)^2 \frac{2\sqrt{-x}}{|1-x|}} = \dfrac{1}{(1-x)\sqrt{-x}}$ car $1 - x > 0$.