CB n°3 - Nombres complexes - Sujet 1

1. Question de cours : Donner les formules d'Euler.

2. Donner la forme algébrique et la forme trigonométrique des nombres complexes suivants :

a. $z_1 = \dfrac{-\sqrt{3}+5\mathrm{i}}{\sqrt{3}+2\mathrm{i}} = \dfrac{(-\sqrt{3}+5\mathrm{i})(\sqrt{3}-2\mathrm{i})}{7} = 1+\sqrt{3}\mathrm{i} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$

b. $z_2 = \dfrac{3+\mathrm{i}\sqrt{3}}{1-\mathrm{i}} = \dfrac{(3+\mathrm{i}\sqrt{3})(1+\mathrm{i})}{2} = \dfrac{3-\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3+\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$

et $z_2 = \dfrac{2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)}{\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}\right)} = \sqrt{6}\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}} = \sqrt{6}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{12}}$

c. $z_3 = \mathrm{i}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ où $\theta \in [0,\pi]$. $z_3 = \cos\theta + (1+\sin\theta)\mathrm{i}$

et $z_3 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}\right) = 2\cos\left(\dfrac{\theta}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}$

c'est bien une forme trigonométrique car comme $\theta\in[0,\pi]$, $\dfrac{\theta}{2}-\dfrac{\pi}{4} \in \left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right]$ donc le cosinus est strictement positif.

3. Donner les racines carrées du nombre complexe $z=-3-4\mathrm{i}$.
$z = (\pm(1-2\mathrm{i}))^2$

4. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante, après avoir montré qu'elle admet une solution réelle :

$$3z^3 + (2-9\mathrm{i})z^2 - (7+3\mathrm{i})z + 2 + 2\mathrm{i} = 0$$

$x\in\mathbb{R}$ est solution si, et seulement si : $\begin{cases} 3x^3+2x^2-7x+2=0 & (1)\\ -9x^2-3x+2=0 & (2)\end{cases}$

L'équation (2) admet pour solutions $-\dfrac{2}{3}$ et $\dfrac{1}{3}$.

$\dfrac{1}{3}$ est également solution de l'équation (1), c'est donc une solution de l'équation initiale qui s'écrit :

$$(3z-1)\left(z^2+(1-3\mathrm{i})z-2-2\mathrm{i}\right)=0$$

L'équation $z^2+(1-3\mathrm{i})z-2-2\mathrm{i}=0$ a pour discriminant $\Delta=2\mathrm{i}$ dont une racine carrée est $1+\mathrm{i}$; ses solutions sont donc $2\mathrm{i}$ et $-1+\mathrm{i}$.
Finalement, $S=\left\{\dfrac{1}{3}, 2\mathrm{i}, -1+\mathrm{i}\right\}$.

5. Linéariser $\cos^3 x\sin^2 x$.
$\cos^3 x \sin^2 x = -\dfrac{1}{2^5}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right)^3\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right)^2 = -\dfrac{1}{2^4}\left(\cos(5x)+\cos(3x)-2\cos(x)\right)$.

6. Développer $\cos(2x)\sin(3x)$.
D'après la formule de Moivre, on a :
$\cos(2x) = \mathrm{Re}\left((\cos x+\mathrm{i}\sin x)^2\right) = \cos^2 x - \sin^2 x$ et
$\sin(3x) = \mathrm{Im}\left((\cos x+\mathrm{i}\sin x)^3\right) = 3\cos^2 x\sin x - \sin^3 x$, donc
$\cos(2x)\sin(3x) = 3\cos^4 x\sin x - 4\cos^2 x\sin^3 x + \sin^5 x$.

CB N°3 - NOMBRES COMPLEXES - SUJET 2

1. Question de cours : Donner la formule de Moivre.

2. Donner la forme algébrique et la forme trigonométrique des nombres complexes suivants :

a. $z_1 = \dfrac{\sqrt{3}+2\mathrm{i}}{\sqrt{3}-5\mathrm{i}} = \dfrac{(\sqrt{3}+2\mathrm{i})(\sqrt{3}+5\mathrm{i})}{28} = -\dfrac{1}{4} + \dfrac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i} = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$

b. $z_2 = \dfrac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{3}-\mathrm{i}} = \dfrac{(1+\mathrm{i})(\sqrt{3}+\mathrm{i})}{4} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{4} + \dfrac{1+\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}$

et $z_2 = \dfrac{\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}{2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{12}}$

c. $z_3 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \mathrm{i}$ où $\theta \in \left[\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ $\quad z_3 = \cos\theta + (\sin\theta - 1)\mathrm{i}$

et $z_3 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}\right) = 2\cos\left(\dfrac{\theta}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}$

c'est bien une forme trigonométrique car comme $\theta \in \left[\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, $\dfrac{\theta}{2} + \dfrac{\pi}{4} \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ donc le cosinus est strictement positif.

3. Donner les racines carrées de $z = 5 + 12\mathrm{i}$.
$z = (\pm(3+2\mathrm{i}))^2$.

4. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante, après avoir montré qu'elle admet une solution réelle :

$$2z^3 + (-3+8\mathrm{i})z^2 - (5+10\mathrm{i})z + 3 + 3\mathrm{i} = 0$$

$x \in \mathbb{R}$ est solution si, et seulement si : $\begin{cases} 2x^3 - 3x^2 - 5x + 3 = 0 & (1) \\ 8x^2 - 10x + 3 = 0 & (2) \end{cases}$

L'équation (2) admet pour solutions $\dfrac{3}{4}$ et $\dfrac{1}{2}$.

$\dfrac{1}{2}$ est également solution de l'équation (1), c'est donc une solution de l'équation initiale qui s'écrit :

$$(2z-1)\left(z^2 + (-1+4\mathrm{i})z - 3 - 3\mathrm{i}\right) = 0$$

L'équation $z^2 + (-1+4\mathrm{i})z - 3 - 3\mathrm{i} = 0$ a pour discriminant $\Delta = -3 + 4\mathrm{i}$ dont une racine carrée est $1 + 2\mathrm{i}$; ses solutions sont donc $1 - \mathrm{i}$ et $-3\mathrm{i}$.
Finalement, $S = \left\{\dfrac{1}{2}, 1-\mathrm{i}, -3\mathrm{i}\right\}$.

5. Linéariser $\cos x \sin^4 x$.
$\cos x \sin^4 x = \dfrac{1}{2^5}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right)\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right)^4 = \dfrac{1}{2^4}\left(\cos(5x) - 3\cos(3x) + 2\cos(x)\right)$.

6. Développer $\cos(3x)\sin(2x)$.
D'après la formule de Moivre, on a :
$\cos(3x) = \mathrm{Re}\left((\cos x + \mathrm{i}\sin x)^3\right) = \cos^3 x - 3\cos x \sin^2 x$ et $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$, donc
$\cos(3x)\sin(2x) = 2\cos^4 x \sin x - 6\cos^2 x \sin^3 x$.