

CB N°2 - CALCUL ALGÈBRE - TRIGONOMÉTRIE - SUJET 1

1. Etant donné un entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note f la fonction définie sur \mathbb{R} , par

$$f(x) = \sum_{k=0}^n x^k$$

a. **Question de cours**

Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, (x-1)f(x) = x^{n+1} - 1$.

b. Dériver f sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ de deux façons différentes.

c. En déduire que, pour $x \neq 1$,

$$\sum_{k=1}^n kx^{k-1} = \frac{(nx - n - 1)x^n + 1}{(x-1)^2}$$

d. Exprimer simplement la somme : $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} j2^i$.

2. En remarquant que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{2}{k(k+2)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}$, calculer la somme suivante, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^n \frac{2}{k(k+2)}$$

3. Résoudre les inéquations suivantes :

a. $\sqrt{4-x^2} \leq x+1$

b. $-1 \leq \frac{x-2}{3x+1} \leq 1$

4. Résoudre les équations suivantes dans \mathbb{R} :

a. $\cos(2x) + \sin(2x) = 0$

b. $\cos(2x) + \sin(x) = 0$

5. Résoudre dans $[0, 2\pi]$ l'inéquation :

$$\sin(2x) - \sin(x) \geq 0$$

6. **Question BONUS :**

Résoudre l'inéquation suivante, en discutant suivant les valeurs du paramètre m :

$$\frac{x-1}{2-x} \leq m$$

CB N°2 - CALCUL ALGÈBRIQUE - TRIGONOMÉTRIE - SUJET 2

1. Etant donné un entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note f la fonction définie sur \mathbb{R} , par

$$f(x) = x^{n+1} - 1$$

a. **Question de cours**

Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (x - 1) \sum_{k=0}^n x^k$.

b. Dériver la fonction g définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $g(x) = \frac{f(x)}{x - 1}$.

c. En déduire que, pour $x \neq 1$,

$$\sum_{k=1}^n kx^{k-1} = \frac{(nx - n - 1)x^n + 1}{(x - 1)^2}$$

d. Exprimer simplement la somme : $\sum_{0 \leq j \leq i \leq n} i2^j$.

2. Calculer la somme suivante, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{2}{k} \right)$$

3. Résoudre les inéquations suivantes :

a. $\sqrt{2x^2 + 2x - 4} \geq x + 1$

b. $-1 \leq \frac{2x + 1}{x - 1} \leq 1$

4. Résoudre les équations suivantes dans \mathbb{R} :

a. $\cos(2x) - \sin(2x) = 0$

b. $\cos(2x) + \cos(x) = 0$

5. Résoudre dans $[0, 2\pi]$ l'inéquation :

$$\sin(2x) - \cos(x) \geq 0$$

6. **Question BONUS :**

Résoudre l'inéquation suivante, en discutant suivant les valeurs du paramètre m :

$$\frac{x + 1}{x - 2} \geq m$$