# CB N°2 - Calcul algébrique - Trigonométrie - Sujet 1

**1.** Etant donné un entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f$ le fonction définie sur $\mathbb{R}$, par

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k$$

**a. Question de cours**
Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \quad (x-1)f(x) = x^{n+1} - 1$.

$(x-1)f(x) = \sum_{k=0}^{n} x^{k+1} - \sum_{k=0}^{n} x^k = \sum_{i=1}^{n+1} x^i - \sum_{k=0}^{n} x^k = x^{n+1} - x^0 = x^{n+1} - 1$ par télescopage.

**b.** Dériver $f$ sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ de deux façons différentes.

La fonction $f$ est polynomiale ; on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$.

D'après la question précédente, on a pour $x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$, $f(x) = \dfrac{x^{n+1}-1}{x-1}$ donc en dérivant ce quotient, pour $x \neq 1$, $f'(x) = \dfrac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}$

**c.** En déduire que, pour $x \neq 1$,

$$\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \frac{(nx-n-1)x^n + 1}{(x-1)^2}$$

C'est l'égalité des deux formes de la dérivée de $f$ trouvées à la question précédente.

**d.** Exprimer simplement la somme : $\displaystyle\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} j2^i$.

$$\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} j2^i = \sum_{j=1}^{n} j \sum_{i=1}^{j} 2^i = \sum_{j=1}^{n} j2\left(2^j - 1\right) = 4\sum_{j=1}^{n} j2^{j-1} - 2\sum_{j=1}^{n} j = 4\left((n-1)2^n + 1\right) - n(n+1).$$

**2.** En remarquant que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{2}{k(k+2)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+2}$, calculer la somme suivante, pour $n \in \mathbb{N}^*$ :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k(k+2)}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k(k+2)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{i=3}^{n+2} \frac{1}{i} = 1 + \frac{1}{2} + \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k} - \left(\sum_{i=3}^{n} \frac{1}{i} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right) = \frac{3}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$$

**3.** Résoudre les inéquations suivantes :

**a.** $\sqrt{4-x^2} \leq x+1$

Le domaine de validité de cette inéquation est $[-2, 2]$.
Si $x < -1$, l'inégalité n'est jamais vérifiée, il n'y a donc pas de solution dans $[-2, -1[$.
Si $x \geq -1$, l'inéquation est équivalente dans $[-1, 2]$ à :
$4 - x^2 \leq x^2 + 2x + 1 \Leftrightarrow 2x^2 + 2x - 3 \geq 0$.
On en déduit l'ensemble des solutions : $S = \left[\dfrac{-1+\sqrt{7}}{2}, 2\right]$.

**b.** $-1 \leq \dfrac{x-2}{3x+1} \leq 1$

Le domaine de validité de ces inéquations est $\mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{1}{3}\right\}$.

Dans cet ensemble, le système d'inéquations équivaut à : $\left|\dfrac{x-2}{3x+1}\right|^2 \leq 1 \Leftrightarrow (x-2)^2 \leq (3x+1)^2 \Leftrightarrow$ $8x^2 + 10x - 3 \geq 0$.

On en déduit l'ensemble des solutions : $S = \left]-\infty, -\dfrac{3}{2}\right] \cup \left[\dfrac{1}{4}, +\infty\right[$

**4.** Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$ :

**a.** $\cos(2x) + \sin(2x) = 0$

$\cos(2x) + \sin(2x) = 0 \Leftrightarrow \cos\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow 2x - \dfrac{\pi}{4} \equiv \dfrac{\pi}{2}[\pi] \Leftrightarrow \left(\exists k \in \mathbb{Z}, x = \dfrac{3\pi}{8} + \dfrac{k\pi}{2}\right)$

On en déduit l'ensemble des solutions : $S = \displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left\{\dfrac{3\pi}{8} + \dfrac{k\pi}{2}\right\}$

**b.** $\cos(2x) + \sin(x) = 0$

$\cos(2x) + \sin(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 x + \sin x = 0 \Leftrightarrow (\sin x = 1) \vee \left(\sin x = -\dfrac{1}{2}\right)$

$\Leftrightarrow \left(x \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi] \vee x \equiv -\dfrac{\pi}{6}[2\pi] \vee x \equiv -\dfrac{5\pi}{6}[2\pi]\right)$

On en déduit l'ensemble des solutions : $S = \displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left\{\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi, -\dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi\right\}$.

**5.** Résoudre dans $[0, 2\pi]$ l'inéquation :

$$\sin(2x) - \sin(x) \geq 0$$

$\sin(2x) - \sin(x) \geq 0 \Leftrightarrow \sin x(2\cos x - 1) \geq 0$

Sur $[0, 2\pi], \sin x \geq 0 \Leftrightarrow x \in [0, \pi]$ et $\cos x \geq \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left[0, \dfrac{\pi}{3}\right] \cup \left[\dfrac{5\pi}{3}, 2\pi\right]$.

Un tableau de signes permet de conclure : $S = \left[0, \dfrac{\pi}{3}\right] \cup \left[\pi, \dfrac{5\pi}{3}\right]$

**6. Question BONUS :**

Résoudre l'inéquation suivante, en discutant suivant les valeurs du paramètre $m$ :

$$\frac{x-1}{2-x} \leq m$$

Le domaine de validité de l'inéquation est $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. Sur ce domaine, elle équivaut à : $\dfrac{(1+m)x - 1 - 2m}{2-x} \leq 0$.

$\rightsquigarrow$ si $m = -1$, l'inéquation s'écrit $\dfrac{1}{2-x} \leq 0$ ; l'ensemble des solutions est alors $S = ]2, +\infty[$.

$\rightsquigarrow$ Si $m \neq -1$, le numérateur s'annule pour $x = \dfrac{1+2m}{m+1} = 2 - \dfrac{1}{m+1}$. On a donc :

$\looparrowright$ Si $m < -1$, $m + 1 < 0$ et $2 - \dfrac{1}{m+1} > 2$ d'où le tableau de signes :

| $x$ | $-\infty$ | | $2$ | | $\frac{1+2m}{1+m}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $(1+m)x-1-2m$ | | $+$ | \| | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $2-x$ | | $+$ | $0$ | $-$ | \| | $-$ | |
| $\frac{(1+m)x-1-2m}{2-x}$ | | $+$ | \|\| | $-$ | $0$ | $+$ | |

↬ Si $m>-1, m+1>0$ et $2-\dfrac{1}{m+1}>2$ d'où le tableau de signes :

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{1+2m}{1+m}$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $(1+m)x-1-2m$ | | $-$ | $0$ | $+$ | \| | $+$ | |
| $2-x$ | | $+$ | \| | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $\frac{(1+m)x-1-2m}{2-x}$ | | $-$ | $0$ | $+$ | \|\| | $-$ | |

Finalement l'ensemble des solutions est : $\begin{cases} ]2,+\infty[ & \text{si } m=-1 \\ \left]2, \dfrac{1+2m}{1+m}\right] & \text{si } m<-1 \\ \left]-\infty, \dfrac{1+2m}{m+1}\right] \cup ]2,+\infty[ & \text{si } m>-1 \end{cases}$

# CB n°2 - Calcul algébrique - Trigonométrie - Sujet 2

**1.** Etant donné un entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f$ le fonction définie sur $\mathbb{R}$, par

$$f(x) = x^{n+1} - 1$$

**a. Question de cours**

Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = (x-1)\sum_{k=0}^{n} x^k$.

$(x-1)\sum_{k=0}^{n} x^k = \sum_{k=0}^{n} x^{k+1} - \sum_{k=0}^{n} x^k = \sum_{i=1}^{n+1} x^i - \sum_{k=0}^{n} x^k = x^{n+1} - x^0 = x^{n+1} - 1 = f(x)$ par télescopage.

**b.** Dériver la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $g(x) = \dfrac{f(x)}{x-1}$.

Pour $x \neq 1$, $g'(x) = \dfrac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}$

**c.** En déduire que, pour $x \neq 1$,

$$\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \frac{(nx-n-1)x^n + 1}{(x-1)^2}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, g(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k$. On a donc pour $x \neq 1, g'(x) = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$.

Ce qui donne le résultat attendu.

**d.** Exprimer simplement la somme : $\sum_{0 \leq j \leq i \leq n} i2^j$.

$$\sum_{0 \leq j \leq i \leq n} i2^j = \sum_{i=0}^{n} i \sum_{j=0}^{i} 2^j = \sum_{i=0}^{n} i\left(2^{i+1} - 1\right) = 2^2 \sum_{i=0}^{n} i2^{i-1} - \sum_{i=0}^{n} i = 4\left((n-1)2^n + 1\right) - \frac{n(n+1)}{2}.$$

**2.** Calculer la somme suivante, pour $n \in \mathbb{N}^*$ :

$$\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{2}{k}\right)$$

$$\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{2}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln(k+2) - \sum_{k=1}^{n} \ln(k) = \sum_{i=3}^{n+2} \ln(i) - \sum_{k=1}^{n} \ln(k)$$
$$= \sum_{i=3}^{n} \ln(i) + \ln(n+1) + \ln(n+2) - \left(\ln(1) + \ln(2) - \sum_{k=3}^{n} \ln(k)\right) = \ln(n+1) + \ln(n+2) - \ln 2 =$$
$$\ln\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)$$

**3.** Résoudre les inéquations suivantes :

**a.** $\sqrt{2x^2 + 2x - 4} \geq x + 1$

Le domaine de validité de l'inéquation est $]-\infty, -2] \cup [1, +\infty[$.

Si $x \leq -1$, l'inégalité est toujours vérifiée, donc un premier ensemble de solutions est $]-\infty, -2]$.

Si $x \geq -1$, l'inéquation est équivalente dans $[1, +\infty[$ à : $2x^2 + 2x - 4 \geq x^2 + 2x + 1 \Leftrightarrow x^2 - 5 \geq 0$.

On en déduit l'ensemble des solutions : $S = ]-\infty, -2] \cup [\sqrt{5}, +\infty[$.

**b.** $-1 \leq \dfrac{2x+1}{x-1} \leq 1$

Le domaine de validité de ces inéquations est $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Dans cet ensemble le système d'inéquations équivaut à $\left|\dfrac{2x+1}{x-1}\right| \leq 1 \Leftrightarrow (2x+1)^2 \leq (x-1)^2 \Leftrightarrow 3x^2+6x \leq 0$.

On en déduit l'ensemble des solutions : $S = [-2, 0]$.

**4.** Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$ :

**a.** $\cos(2x) - \sin(2x) = 0$

$\cos(2x) - \sin(2x) = 0 \Leftrightarrow \cos\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow 2x + \dfrac{\pi}{4} \equiv \dfrac{\pi}{2}[\pi] \Leftrightarrow \left(\exists k \in \mathbb{Z}, x = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{k\pi}{2}\right)$

On en déduit l'ensemble des solutions : $S = \displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left\{\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}\right\}$

**b.** $\cos(2x) + \cos(x) = 0$

$\cos(2x)+\cos(x) = 0 \Leftrightarrow 2\cos^2 - 1 + \cos x = 0 \Leftrightarrow (\cos x = -1) \vee \left(\cos x = \dfrac{1}{2}\right) \Leftrightarrow \left(x \equiv \pi[2\pi] \vee x \equiv \pm\dfrac{\pi}{3}[2\pi]\right)$.

On en déduit l'ensemble des solutions : $S = \displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left\{(2k+1)\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi, -\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right\}$.

**5.** Résoudre dans $[0, 2\pi]$ l'inéquation :

$$\sin(2x) - \cos(x) \geq 0$$

$\sin(2x) - \cos(x) \geq 0 \Leftrightarrow \cos x\,(2\sin x - 1) \geq 0$.

Sur $[0, 2\pi]$, $\cos x \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] \cup \left[\dfrac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ et $\sin x \geq \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left[\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}\right]$.

Un tableau de signes donne : $S = \left[\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{2}\right] \cup \left[\dfrac{5\pi}{6}, \dfrac{3\pi}{2}\right]$.

**6. Question BONUS :**

Résoudre l'inéquation suivante, en discutant suivant les valeurs du paramètre $m$ :

$$\frac{x+1}{x-2} \geq m$$

Le domaine de validité de l'inéquation est $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. Sur ce domaine, elle équivaut à : $\dfrac{(1-m)x + 1 + 2m}{x-2} \geq 0$.

$\rightsquigarrow$ si $m = 1$, l'inéquation s'écrit $\dfrac{3}{x-2} \geq 0$ ; l'ensemble des solutions est alors $S = ]2, +\infty[$.

$\rightsquigarrow$ Si $m \neq 1$, le numérateur s'annule pour $x = \dfrac{1+2m}{m-1} = 2 + \dfrac{3}{m-1}$. On a donc :

$\looparrowright$ Si $m < 1$, $m - 1 < 0$ et $2 + \dfrac{3}{m-1} < 2$ d'où le tableau de signes :

| $x$ | $-\infty$ | $\frac{1+2m}{m-1}$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $(1-m)x+1+2m$ | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $x-2$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $\frac{(1-m)x+1+2m}{x-2}$ | $+$ | $0$ | $-$ | $\|$ | $+$ | |

↬ Si $m>1, m-1>0$ et $2+\dfrac{3}{m-1}>2$ d'où le tableau de signes :

| $x$ | $-\infty$ | | $2$ | | $\frac{1+2m}{m-1}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $(1-m)x+1+2m$ | | $+$ | \| | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $x-2$ | | $-$ | $0$ | $+$ | \| | $+$ | |
| $\frac{(1-m)x+1+2m}{x-2}$ | | $-$ | \|\| | $+$ | $0$ | $-$ | |

Finalement l'ensemble des solutions est : $\begin{cases} ]2,+\infty[ & \text{si } m=1 \\ \left]-\infty, \dfrac{1+2m}{m-1}\right] \cup ]2,+\infty[ & \text{si } m<1 \\ \left]2, \dfrac{1+2m}{m-1}\right] & \text{si } m>1 \end{cases}$