# CB n°1 - Raisonnement - Vocabulaire ensembliste - Sujet 1

**1. Questions de cours**

Compléter les propositions suivantes, et les démontrer :

**a.** $\rceil (P \wedge Q) \Leftrightarrow \cdots$

**b.** Soient $E, F$ et $G$ des ensembles, $f \in F^E g \in G^F$ ; si $g \circ f$ est surjective, alors $\cdots$.

**2.** Donner la négation de l'assertion suivante :

$$\exists a \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad (|x-a| < 1) \Rightarrow (|f(x) - f(a)| \leq 1)$$

**3.** $f$ désigne une fonction réelle, traduire à l'aide de quantificateurs les expressions suivantes :

**a.** $f$ s'annule en chaque entier ;

**b.** Tout réel est inférieur à son image par $f$ ;

**c.** $f$ n'est pas croissante.

**4.** $P, Q$ et $R$ désignent des assertions. Montrer que

$$((P \vee Q) \wedge \rceil (Q \vee R)) \Leftrightarrow (P \wedge \rceil Q \wedge \rceil R)$$

**5.** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, 3^{6n-4} - 2$ est un multiple de 7.

**6.** Étudier l'injectivité et la surjectivité des applications suivantes (justifier la réponse) :

**a.** $f : \left| \begin{array}{ccc} [-1,0] & \to & [0,1] \\ x & \mapsto & |x| \end{array} \right.$

**b.** $g : \left| \begin{array}{ccc} \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] & \to & [-1,1] \\ x & \mapsto & \cos(\pi x) \end{array} \right.$

**c.** $h : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x+y \end{array} \right.$

# CB n°1 - Raisonnement - Vocabulaire ensembliste - Sujet 2

**1. Questions de cours**

Compléter les propositions suivantes, et les démontrer :

**a.** $\rceil (P \vee Q) \Leftrightarrow \cdots$

**b.** Soient $E, F$ et $G$ des ensembles, $f \in F^E g \in G^F$ ; si $g \circ f$ est injective, alors $\cdots$.

**2.** Donner la négation de l'assertion suivante :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad (n \geq N) \Rightarrow (|u_n| \leq \varepsilon))$$

**3.** $f$ désigne une fonction réelle, traduire à l'aide de quantificateurs les expressions suivantes :

**a.** $f$ ne s'annule qu'une fois sur $\mathbb{R}$ ;

**b.** $f$ n'admet pas de minimum ;

**c.** $f$ n'est pas de signe constant.

**4.** $P, Q$ et $R$ désignent des assertions. Montrer que

$$((P \wedge \rceil Q) \wedge \rceil (R \wedge \rceil Q)) \Leftrightarrow (P \wedge \rceil (Q \vee R))$$

**5.** Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ et tout $n \in \mathbb{N}, (1+x)^n \geq 1 + nx$.

**6.** Étudier l'injectivité et la surjectivité des applications suivantes (justifier la réponse) :

**a.** $f : \left| \begin{array}{ccc} [-1,1] & \to & [0,1] \\ x & \mapsto & |x| \end{array} \right.$

**b.** $g : \left| \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & [-1,1] \\ x & \mapsto & \sin(\pi x) \end{array} \right.$

**c.** $h : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ x & \mapsto & (x, x^2) \end{array} \right.$