CB n°1 - Raisonnement - Vocabulaire ensembliste - Sujet 1

1. Questions de cours

Compléter les propositions suivantes, et les démontrer :

a. $\rceil(P \wedge Q) \Leftrightarrow (\rceil P \vee \rceil Q)$

P	Q	$P \wedge Q$	$\rceil(P \wedge Q)$	$\rceil P$	$\rceil Q$	$\rceil P \vee \rceil Q$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	F	V	V	F	V
F	F	F	V	V	V	V

b. Soient E, F et G des ensembles, $f \in F^E g \in G^F$; si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.
Soit $y \in G$; comme $g \circ f$ est surjective, il existe $x \in E$ tel que $g(f(x)) = y$ on a donc l'existence de $a = f(x) \in F$ tel que $g(a) = y$ donc g est surjective.

2. Donner la négation de l'assertion suivante :
$\exists a \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad (|x - a| < 1) \Rightarrow (|f(x) - f(a)| \leq 1)$
$\forall a \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, \quad ((|x - a| < 1) \wedge (|f(x) - f(a)| > 1))$

3. f désigne une fonction réelle, traduire à l'aide de quantificateurs les expressions suivantes :

a. f s'annule en chaque entier : $\forall n \in \mathbb{Z}, \quad f(n) = 0$

b. Tout réel est inférieur à son image par f : $\forall x \in \mathbb{R}, x \leq f(x)$

c. f n'est pas croissante : $\exists (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad ((x \leq y) \wedge (f(x) > f(y)))$

4. P, Q et R désignent des assertions. Montrer que

$$((P \vee Q) \wedge \rceil(Q \vee R)) \Leftrightarrow (P \wedge \rceil Q \wedge \rceil R)$$

$$((P \vee Q) \wedge \rceil(Q \vee R)) \Leftrightarrow ((P \vee Q) \wedge (\rceil Q \wedge \rceil R) \Leftrightarrow (P \wedge \rceil Q \wedge \rceil R) \vee \underbrace{(Q \wedge \rceil Q \wedge \rceil R)}_{\text{assertion fausse}} \Leftrightarrow (P \wedge \rceil Q \wedge \rceil R)$$

5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, 3^{6n-4} - 2$ est un multiple de 7.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note H_n : $3^{6n-4} - 2$ est un multiple de 7.
On a $3^{6-4} - 2 = 9 - 2 = 7$ est un multiple de 7 donc H_1 est vraie.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose H_n vraie, c'est-à-dire qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $3^{6n-4} - 2 = 7k$.
On a : $3^{6(n+1)-4} - 2 = 3^6 \times 3^{6n-4} - 2 = 3^6 \times (3^{6n-4} - 2) + 3^6 \times 2 - 2 = 7k + 7 \times 208$ est un multiple de 7 donc H_{n+1} est vraie.
Par principe de récurrence, H_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

6. Étudier l'injectivité et la surjectivité des applications suivantes (justifier la réponse) :

a. $f : \left| \begin{array}{ccc} [-1, 0] & \rightarrow & [0, 1] \\ x & \mapsto & |x| \end{array} \right.$

f est bijective car pour $x \in [-1, 0], |x| = -x$ donc on a :
$f(a) = f(b) \Rightarrow -a = -b \Rightarrow a = b$ donc f est injective ;
$\forall y \in [0, 1], f(-y) = y$ donc y admet un antécédent dans $[-1, 0]$ par f et f est surjective.

b. $g : \left| \begin{array}{ccc} \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] & \to & [-1,1] \\ x & \mapsto & \cos(\pi x) \end{array} \right.$

g n'est pas injective car $g\left(-\frac{1}{2}\right) = g\left(\frac{1}{2}\right) = 0$.

g n'est pas surjective car $\left(x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \Rightarrow \pi x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right)$ et le cosinus d'un angle de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ est toujours positif donc -1 (par exemple) n'a pas d'antécédent par g.

c. $h : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x+y \end{array} \right.$

h n'est pas injective car $h(0,1) = h(1,0)$.

h est surjective car pour $a \in \mathbb{R}$, $h(a,0) = a$ donc a admet un antécédent dans $\mathbb{R}^2$ par h.

CB N°1 - Raisonnement - Vocabulaire ensembliste - Sujet 2

1. Questions de cours

Compléter les propositions suivantes, et les démontrer :

a. $\rceil(P \vee Q) \Leftrightarrow (\rceil P \wedge \rceil Q)$

P	Q	$P \vee Q$	$\rceil(P \vee Q)$	$\rceil P$	$\rceil Q$	$\rceil P \wedge \rceil Q$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	V	F	F	V	F
F	V	V	F	V	F	F
F	F	F	V	V	V	V

b. Soient E, F et G des ensembles, $f \in F^E g \in G^F$; si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.

Si $f(a) = f(b)$ alors $g(f(a)) = g(f(b))$ et comme $g \circ f$ est injective $a = b$.

2. Donner la négation de l'assertion suivante :

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\quad (n \geq N) \Rightarrow (|u_n| \leq \varepsilon))$

$\exists \varepsilon > 0,\ \forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \in \mathbb{N},\ (n \geq N) \wedge (|u_n| > \varepsilon)$

3. f désigne une fonction réelle, traduire à l'aide de quantificateurs les expressions suivantes :

a. f ne s'annule qu'une fois sur $\mathbb{R}$ $\quad \exists! x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$

b. f n'admet pas de minimum $\quad \forall m \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, f(m) > f(x)$

c. f n'est pas de signe constant $\quad \exists (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x)f(y) < 0$

4. P, Q et R désignent des assertions. Montrer que

$$((P \wedge \rceil Q) \wedge \rceil (R \wedge \rceil Q)) \Leftrightarrow (P \wedge \rceil (Q \vee R))$$

$((P \wedge \rceil Q) \wedge \rceil (R \wedge \rceil Q)) \Leftrightarrow ((P \wedge \rceil Q) \wedge (\rceil R \vee Q)) \Leftrightarrow ((P \wedge \rceil Q \wedge \rceil R) \vee \underbrace{(P \wedge \rceil Q \wedge Q)}_{\text{assertion fausse}}) \Leftrightarrow (P \wedge (\rceil Q \wedge \rceil R)) \Leftrightarrow (P \wedge \rceil (Q \vee R))$

5. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ et tout $n \in \mathbb{N}, (1+x)^n \geq 1+nx$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $H_n : \forall x \in \mathbb{R}^+,\ (1+x)^n \geq 1+nx$.
On a, pour $x \in \mathbb{R}^+$: $(1+x)^0 = 1$ et $1 + 0 \times x = 1$ donc H_0 est vraie.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose H_n vraie, c'est-à-dire pour tout $x \in \mathbb{R}^+, (1+x)^n \geq 1+nx$.
Soit $x \geq 0$, on a $1 + x > 0$ donc $(1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x)$.
Or $(1+nx)(1+x) = 1+(n+1)x+nx^2$ et $nx^2 \geq 0$ on obtient donc :
$(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x+nx^2 \geq 1+(n+1)x$. H_{n+1} est donc vraie.
Par principe de récurrence, H_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

6. Étudier l'injectivité et la surjectivité des applications suivantes (justifier la réponse) :

a. $f : \left| \begin{array}{ccc} [-1,1] & \to & [0,1] \\ x & \mapsto & |x| \end{array} \right.$

f n'est pas injective car $f(-1) = f(1)$.
f est surjective car pour $x \in [0,1], f(x) = x$ donc x admet un antécédent dans $[-1,1]$ par f.

b. $g : \left| \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & [-1,1] \\ x & \mapsto & \sin(\pi x) \end{array} \right.$

g n'est pas injective car $g(0) = g(1) = 0$.
g n'est pas surjective car $(x \in [0,1] \Rightarrow \pi x \in [0,\pi])$ et le sinus d'un angle dans $[0,\pi]$ est toujours positif donc -1 (par exemple) n'a pas d'antécédent par g.

c. $h : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ x & \mapsto & (x, x^2) \end{array} \right.$

h est injective car $\big(h(a) = h(b) \Leftrightarrow (a, a^2) = (b, b^2) \Leftrightarrow a = b\big)$.
h n'est pas surjective car $(0,1)$ (par exemple) n'a pas d'antécédent par h puisque $0^2 \neq 1$.