CB n°11 - Séries numériques - Sujet 1

1. Déterminer la nature des séries de terme général u_n dans les cas suivants :

a. $u_n = \dfrac{1}{n^2 + \cos^2 n}$

b. $u_n = \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{n}\right)^n$

c. $u_n = \cos(n) - \cos(n-1)$

2. Soit $\sum\limits_{n \geq 0} a_n$ une série numérique positive, convergente.

Déterminer la nature des séries de terme général u_n dans les cas suivants :

a. $u_n = \dfrac{1 - \cos(a_n)}{a_n}$

b. $u_n = a_n^2$

3. On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par

$$u_n = \ln(n) - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{1+k}$$

En étudiant la série de terme général $v_n = u_{n+1} - u_n$, montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.

4. On considère pour $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \frac{2n^2 - n + 2}{n!}$$

a. Montrer que $\sum u_n$ converge.

b. **Question de cours :** Donner $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{n!}$.

c. En déduire la somme de la série $\sum\limits_{n \geq 0} u_n$.

5. Etablir l'existence et calculer la somme de la série $\sum\limits_{n \geq 2} u_n$ où

$$u_n = \ln\left(1 - \frac{2}{n(n+1)}\right)$$

CB n°11 - Séries numériques - Sujet 2

1. Déterminer la nature des séries de terme général u_n dans les cas suivants :

a. $u_n = \dfrac{|\sin(n)|}{n^2}$

b. $u_n = n^{\frac{1}{n^2}} - 1$

c. $u_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$

2. Soit $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$ une série numérique positive, convergente.
Déterminer la nature des séries de terme général u_n dans les cas suivants :

a. $u_n = \dfrac{a_n}{1+a_n}$

b. $u_n = \sin^2(a_n)$

3. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$$

En étudiant la série de terme général $v_n = u_{n+1} - u_n$, montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

4. On considère pour $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \frac{3n^2+2n-1}{n!}$$

a. Montrer que $\sum u_n$ converge.

b. **Question de cours :** Donner $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{n!}$.

c. En déduire la somme de la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$.

5. Etablir l'existence et calculer la somme de la série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ où

$$u_n = \frac{1}{n\sqrt{n+2} + \sqrt{n}(n+2)}$$