CB N°11 - Séries numériques - Sujet 1

1. Déterminer la nature des séries de terme général u_n dans les cas suivants :

a. $u_n = \dfrac{1}{n^2 + \cos^2 n}$

$\sum u_n$ est une série à termes positifs, telle que $0 \leq u_n \leq \dfrac{1}{n^2}$. Comme $\sum \dfrac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente, par comparaison, on en déduit que $\sum u_n$ est convergente.

b. $u_n = \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{n}\right)^n$

On a : $u_n = \mathrm{e}^{n \ln\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{e}^{n\left(\ln \frac{1}{2} + \frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\mathrm{e}^2}{2^n}$;

ainsi $\sum u_n$ est une série à termes positifs, dont le terme général est équivalent en $+\infty$ au terme général d'une série géométrique convergente. On en déduit que $\sum u_n$ converge.

c. $u_n = \cos(n) - \cos(n-1)$

$u_n = v_n - v_{n-1}$ où $v_n = \cos(n)$. La suite (v_n) n'a pas de limite en $+\infty$ donc la série télescopique $\sum u_n = \sum (v_n - v_{n-1})$ diverge.

2. Soit $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$ une série numérique positive, convergente.

Déterminer la nature des séries de terme général u_n dans les cas suivants :

a. $u_n = \dfrac{1 - \cos(a_n)}{a_n}$

Remarquons tout d'abord que puisque $\sum a_n$ converge, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$;

on en déduit que $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\frac{1}{2}a_n^2}{a_n}$, c'est-à-dire $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2} a_n$.

$\sum a_n$ est à termes positifs et convergente donc, par comparaison, il en est de même de $\sum u_n$.

b. $u_n = a_n^2$

Comme remarqué précédemment, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ donc $a_n^2 \underset{n\to+\infty}{=} o(a_n)$ d'où, par comparaison de séries à termes positifs, $\sum a_n^2$ converge.

3. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par

$$u_n = \ln(n) - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{1+k}$$

En étudiant la série de terme général $v_n = u_{n+1} - u_n$, montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} - u_n = \ln(n+1) - \ln(n) - \dfrac{1}{2+n} = \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) - \dfrac{1}{n\left(1 + \frac{2}{n}\right)}$

Ainsi, $v_n = u_{n+1} - u_n \underset{n\to+\infty}{=} \left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n^2}\right) - \dfrac{1}{n}\left(1 - \dfrac{2}{n}\right) + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. Ainsi $v_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{3}{2n^2}$.

La série de terme général $\sum v_n$ est donc à termes positifs. De plus, son terme général est équivalent au terme général d'une série de Riemann convergente, donc par comparaison $\sum v_n$ converge.

Enfin, la série télescopique $\sum v_n = \sum (u_{n+1} - u_n)$ convergeant, on en déduit que la suite (u_n) converge.

4. On considère pour $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \frac{2n^2 - n + 2}{n!}$$

a. Montrer que $\sum u_n$ converge.

$\sum u_n$ est une série à termes positifs, et $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 u_n = 0$ donc le critère de Riemann donne la convergence.

b. **Question de cours :** Donner $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = \mathrm{e}$.

c. En déduire la somme de la série $\displaystyle\sum_{n \geq 0} u_n$.

Pour $n \geq 0$, on a : $\dfrac{2n^2 - n + 2}{n!} = \dfrac{2n(n-1) + n + 2}{n!}$. On a donc, pour $n \geq 2$:

$S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = 2\sum_{k=0}^{n} \frac{k(k-1)}{k!} + \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{k!} + 2\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 2\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-2)!} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k-1)!} + 2\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

Après changement d'indices, un passage à la limite donne : $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} S_n = 2\mathrm{e} + \mathrm{e} + 2\mathrm{e} = 5\mathrm{e}$

5. Etablir l'existence et calculer la somme de la série $\displaystyle\sum_{n \geq 2} u_n$ où

$$u_n = \ln\left(1 - \frac{2}{n(n+1)}\right)$$

Pour $n \geq 2$, on a :

$\ln\left(1 - \dfrac{2}{n(n+1)}\right) = \ln\left(\dfrac{(n+2)(n-1)}{n(n+1)}\right) = \ln(n+2) - \ln(n+1) - \ln(n) + \ln(n-1)$.

Ainsi, pour $n \geq 2$, on a :

$S_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} u_k = \sum_{k=2}^{n} (\ln(k+2) - \ln(k+1)) - \sum_{k=2}^{n} (\ln(k) - \ln(k-1)) = (\ln(n+2) - \ln(3)) - (\ln(n) - \ln(1)) =$

$\ln\left(\dfrac{n+2}{n}\right) - \ln 3 \quad$ par télescopage.

Ainsi, la suite des sommes partielles est convergente, donc la série converge et

$$\sum_{n=2}^{+\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} S_n = -\ln 3$$

CB N°11 - Séries numériques - Sujet 2

1. Déterminer la nature des séries de terme général u_n dans les cas suivants :

a. $u_n = \dfrac{|\sin(n)|}{n^2}$

$\sum u_n$ est une série à termes positifs, telle que $0 \leq u_n \leq \dfrac{1}{n^2}$. Comme $\sum \dfrac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente, par comparaison, on en déduit que $\sum u_n$ est convergente.

b. $u_n = n^{\frac{1}{n^2}} - 1$

On a : $u_n = \mathrm{e}^{\frac{\ln(n)}{n^2}} - 1 \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(n)}{n^2}$ car, par croissances comparées, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(n)}{n^2} = 0$; ainsi $\sum u_n$ est une série à termes positifs.

De plus, par croissances comparées, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{\frac{3}{2}} \dfrac{\ln(n)}{n^2} = 0$ donc le critère de Riemann donne $\sum u_n$ converge.

c. $u_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$

$u_n = v_n - v_{n-1}$ où $v_n = \sqrt{n}$. La suite (v_n) a une limite infinie en $+\infty$ donc la série télescopique $\sum u_n = \sum (v_n - v_{n-1})$ diverge.

2. Soit $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$ une série numérique positive, convergente.

Déterminer la nature des séries de terme général u_n dans les cas suivants :

a. $u_n = \dfrac{a_n}{1+a_n}$

Remarquons tout d'abord que puisque $\sum a_n$ converge, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$; on en déduit que $u_n \underset{+\infty}{\sim} a_n$.

$\sum a_n$ est à termes positifs et convergente donc, par comparaison, il en est de même de $\sum u_n$.

b. $u_n = \sin^2(a_n)$

Comme remarqué précédemment, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ donc $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(a_n)$ d'où, par comparaison de séries à termes positifs, $\sum \sin^2(a_n)$ converge.

3. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$$

En étudiant la série de terme général $v_n = u_{n+1} - u_n$, montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) = \dfrac{1}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)} - \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$;

on a donc $v_n = u_{n+1} - u_n \underset{n\to+\infty}{=} \dfrac{1}{n}\left(1 - \dfrac{1}{n}\right) - \left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n^2}\right) + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. Ainsi $v_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{-1}{2n^2}$.

La série $\sum(-v_n)$ est donc à termes positifs. De plus, son terme général est équivalent au terme général d'une série de Riemann convergente, donc par comparaison $\sum(-v_n)$ converge et par suite $\sum v_n$ converge.

Enfin, la série télescopique $\sum v_n = \sum(u_{n+1} - u_n)$ convergeant, on en déduit que la suite (u_n) converge.

4. On considère pour $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \frac{3n^2+2n-1}{n!}$$

a. Montrer que $\sum u_n$ converge.

$\sum u_n$ est une série à termes positifs, et $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 u_n = 0$ donc le critère de Riemann donne la convergence.

b. Donner $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = \mathrm{e}$.

c. En déduire la somme de la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$.

Pour $n \geq 0$, on a : $\frac{3n^2+2n-1}{n!} = \frac{3n(n-1)+5n-1}{n!}$. On a donc, pour $n \geq 2$:

$S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k = 3\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{k(k-1)}{k!} + 5\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{k}{k!} - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 3\sum\limits_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-2)!} + 5\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{(k-1)!} - 1\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

Après changement d'indices, un passage à la limite donne : $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 3\mathrm{e} + 5\mathrm{e} - 1\mathrm{e} = 7\mathrm{e}$

5. Etablir l'existence et calculer la somme de la série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ où

$$u_n = \frac{1}{n\sqrt{n+2} + \sqrt{n}(n+2)}$$

Pour $n \geq 1$, on a :

$u_n = \frac{n\sqrt{n+2} - \sqrt{n}(n+2)}{n^2(n+2) - n(n+2)^2} = \frac{n\sqrt{n+2} - \sqrt{n}(n+2)}{-2n(n+2)} = -\frac{1}{2\sqrt{n+2}} + \frac{1}{2\sqrt{n}}$

Ainsi, pour $n \geq 1$, on a :

$S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k = \frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(-\frac{1}{\sqrt{k+2}} + \frac{1}{\sqrt{k}}\right) = \frac{1}{2}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+2}}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n+2}}\right)$,

par télescopage.

Ainsi, la suite des sommes partielles est convergente, donc la série converge et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$