CB n°10 - Applications linéaires - Sujet 1

1. Les applications suivantes sont-elles des applications linéaires ? (Justifier la réponse).
Lorsqu'elles le sont, en donner la matrice dans les bases canoniques, puis en déterminer le noyau et l'image.

a. $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x-y, 2x+y-z) \end{array} \right.$

$f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ car on vérifie aisément que $\forall (\lambda, (x_1,y_1,z_1), (x_2,y_2,z_2)) \in \mathbb{R} \times \left(\mathbb{R}^3\right)^2$:
$f\left((x_1,y_1,z_1) + \lambda(x_2,y_2,z_2)\right) = f((x_1,y_1,z_1)) + \lambda f((x_2,y_2,z_2))$

On a : $\mathrm{mat}_{\mathscr{C}_3,\mathscr{C}_2}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

On a déduit que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}\{(1,1,3)\}$ et $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^2$ (car d'après le théorème du rang, $\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\mathrm{Ker}(f))$.

b. $g : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, xy, x-3y) \end{array} \right.$

$g(3,3) = (6,9,-6)$ et $g(1,1) = (2,1,-2)$ donc $g(3(1,1)) \neq 3g(1,1)$ et l'application n'est pas linéaire.

c. $h : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \mapsto & P(1) + P'(1)X + P''(1)X^2 \end{array} \right.$

$h \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_2[X])$ car on vérifie aisément que $\forall (\lambda, P, Q) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R}_2[X])^2, h(P + \lambda Q) = h(P) + \lambda h(Q)$

On a $h(X^0) = X^0$, $\quad h(X) = 1 + X \quad$ et $h(X^2) = 1 + 2X + 2X^2$ donc $\mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(h) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

on en déduit que $\mathrm{Ker}(h) = \{0\}$ et $\mathrm{Im}(h) = \mathbb{R}_2[X]$ car un endomorphisme injectif est bijectif.

2. Soit $E = \mathbb{R}^3$. On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ sa base canonique.
On considère la famille $\mathscr{B}' = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ telle que

$$\varepsilon_1 = e_1 + e_3, \quad \varepsilon_2 = e_1 - e_2, \quad \varepsilon_3 = e_1 + e_2 + e_3$$

et $f \in \mathscr{L}(E)$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

a. Montrer que $\mathscr{B}'$ est une base de E.

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ donc la famille $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ est de rang 3 dans un espace vectoriel de dimension 3, c'est une base.

b. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathscr{B}'$.

La matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$ est $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, d'inverse $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}'}(f) = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c. Sans calcul, justifier que f n'est pas un isomorphisme.
La matrice de f dans $\mathscr{B}'$ n'est pas inversible donc il en est de même de A et f n'est pas un isomorphisme.

3. Déterminer la nature de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice M suivante, ainsi que ses éléments caractéristiques :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$M^2 = M$ donc M est la matrice de la projection p sur $\operatorname{Im}(p) = \operatorname{Vect}\{(0,1,1),(1,1,0)\}$ parallèlement à $\operatorname{Ker}(p) = \operatorname{Vect}\{(1,1,1)\}$.

CB N°10 - Applications linéaires - Sujet 2

1. Les applications suivantes sont-elles des applications linéaires ? (Justifier la réponse).
Lorsqu'elles le sont, en donner la matrice dans les bases canoniques, puis en déterminer le noyau et l'image.

a. $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (x-2y, x+3y, x^2-y^2) \end{array} \right.$

$f((1,0)) = (1,1,1)$ et $f((2,0)) = (2,2,4)$ donc $f\left(2(1,0)\right) \neq 2f((1,0))$ et l'application n'est pas linéaire.

b. $g : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, x-y, x) \end{array} \right.$

$g \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ car on vérifie aisément que $\forall\left(\lambda, (x_1,y_1),(x_2,y_2)\right) \in \mathbb{R} \times \left(\mathbb{R}^2\right)^2$:
$g\left((x_1,y_1) + \lambda(x_2,y_2)\right) = g((x_1,y_1)) + \lambda g((x_2,y_2))$

$\operatorname{mat}_{\mathscr{C}_2,\mathscr{C}_3}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow 2L_3 - L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

On en déduit que $\operatorname{Ker}(g) = \{(0,0)\}$ et $\operatorname{Im}(g) = \operatorname{Vect}\{(1,1,1),(1,-1,0)\}$

c. $h : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \mapsto & P(0) + P'(1)X + P''(2)X^2 \end{array} \right.$

$h \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_2[X])$ car on vérifie aisément que $\forall\left(\lambda, P, Q\right) \in \mathbb{R} \times \left(\mathbb{R}_2[X]\right)^2, h(P + \lambda Q) = h(P) + \lambda h(Q)$

On a $h(X^0) = 1, \quad h(X) = X \quad$ et $h(X^2) = 2X + 2X^2$ donc $\operatorname{mat}_{\mathscr{C}}(h) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

On en déduit que $\operatorname{Ker}(h) = \{0\}$ et $\operatorname{Im}(h) = \mathbb{R}_2[X]$ car un endomorphisme injectif est bijectif.

2. Soit $E = \mathbb{R}^3$. On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ sa base canonique.
On considère la famille $\mathscr{B}' = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ telle que

$$\varepsilon_1 = e_1 + e_2 - e_3, \quad \varepsilon_2 = -e_1 + e_3, \quad \varepsilon_3 = e_2 + e_3$$

et $f \in \mathscr{L}(E)$ dont la matrice dans la vase $\mathscr{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -3 \\ -1 & 2 & -1 \\ 5 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

a. Montrer que $\mathscr{B}'$ est une base de E.

$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc la famille $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ est de rang 3 dans un espace vectoriel de dimension 3, c'est une base.

b. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathscr{B}'$.

La matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ est $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, d'inverse $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}'}(f) = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c. Sans calcul, justifier que f est un isomorphisme.

La matrice de f dans $\mathscr{B}'$ est inversible donc il en est de même de A et f est un isomorphisme.

3. Déterminer la nature de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice M suivante, ainsi que ses éléments caractéristiques :

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$M^2 = \mathrm{I}_3$ donc M est la matrice de la symétrie s par rapport à $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Vect}\{(1,1,0),(1,0,1)\}$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Vect}\{(1,1,-1)\}$.