Math. - ES 1 - S1 - Algèbre

mardi 9 janvier 2018 - Durée 3 h

Toutes les réponses seront justifiées. La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction.

Exercice 1

Démontrer, en justifiant, que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ est semblable à la matrice $T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
On précisera une matrice de passage à **coefficients entiers**, que l'on notera P, et on calculera P^{-1}.

Exercice 2

On cherche à calculer :

$$I = \operatorname*{Inf}_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \left\{ \int_0^1 \left(\mathrm{e}^{-t} - at - b\right)^2 \mathrm{d}t \right\}$$

Pour cela, on munit $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ du produit scalaire :

$$(f|g) = \int_0^1 f(g)g(t)\mathrm{d}t$$

1. Montrer que
$$I = \mathrm{d}(\varphi, F)^2$$
où $\mathrm{d}(\varphi, F)$ est la distance de $\varphi \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ à un sous-espace vectoriel F de $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, tous deux à préciser.
2. Déterminer le projeté orthogonal de φ sur F.
3. En déduire I.

Exercice 3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. I_n désigne la matrice identité d'ordre n. Pour une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$, on note ${}^tA$ sa matrice transposée et $\mathrm{tr}(A)$ sa trace.

Partie 1

Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe deux matrices U, V de $M_n(\mathbb{R})$ et deux réels λ et μ tels que $\lambda\mu \neq 0$ et $\lambda \neq \mu$ vérifiant :

$$A = \lambda U + \mu V \tag{1}$$
$$A^2 = \lambda^2 U + \mu^2 V \tag{2}$$
$$A^3 = \lambda^3 U + \mu^3 V \tag{3}$$

1. Exprimer U et V en fonction de A et A^2.
En déduire que :
$$A^3 = (\lambda+\mu)A^2 - \lambda\mu A$$
2. Montrer que, pour tout entier $p \geq 1$,
$$A^p = \lambda^p U + \mu^p V$$

3. Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à A.
Pour $p \in \mathbb{N}$ et $p \geq 2$, on note $f^p = f \circ \cdots \circ f$ la $p^{\text{ème}}$ composée de f.

a. Montrer que
$$\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(f^p)$$

b. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$:
$$\lambda\mu f^{p-1}(x) = (\lambda+\mu)f^p(x) - f^{p+1}(x)$$

c. En déduire que
$$\mathrm{Ker}(f^p) \subset \mathrm{Ker}(f)$$

d. Montrer que
$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^p)$$

<u>Partie 2</u>

Soient U, V deux matrices colonnes définies par

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

On suppose U et V non nulles. Soit $a \in \mathbb{R}$ et A la matrice définie par :

$$A = aI_n + U\ {}^tV$$

1. Montrer que ${}^tV\ U$ est un réel que l'on exprimera en fonction des coefficients u_i et v_i.

2. Montrer qu'il existe un réel k tel que
$$(U\ {}^tV)^2 = k(U\ {}^tV)$$
En déduire qu'il existe deux réels α et β tels que
$$A^2 = \alpha A + \beta I_n$$

3. On note $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$. Donner l'expression de a_{ij} en fonction de a et des coefficients de U et V.
En déduire que
$$\mathrm{tr}(A) = na + {}^tV\ U$$

4. Exprimer α et β en fonction de a et de $\mathrm{tr}(A)$.

5. Soit λ une valeur propre de A. Montrer que λ^2 est une valeur propre de A^2.
En déduire que λ vérifie l'équation
$$\lambda^2 - \alpha\lambda - \beta = 0$$

6. Montrer que les seules valeurs propres possibles de A sont $\lambda_1 = a$ et $\lambda_2 = \mathrm{tr}(A) - (n-1)a$.

7. On suppose que $\mathrm{tr}(U\ {}^tV) \neq 0$ et on considère les sous-espaces vectoriels E_1 et E_2 définis par
$$E_i = \{X \in M_{n,1}(\mathbb{R}), AX = \lambda_i X\}$$

a. Montrer que
$$E_1 \cap E_2 = \{0\}$$

b. Montrer par analyse-synthèse que, pour tout vecteur colonne X, il existe $X_1 \in E_1$ et $X_2 \in E_2$ tels que $X = X_1 + X_2$.

c. Montrer que la matrice A est diagonalisable.

Fin de l'énoncé d'algèbre