Devoir maison 9 - Recherche d'un minimum global

On se place dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne.

PARTIE I

On considère la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Pourquoi peut-on trouver une base orthonormée de vecteurs propres de A ?
La matrice A est symétrique, donc d'après le théorème spectral, elle est diagonalisable en base orthonormée, c'est-à-dire qu'il existe une base orthonormée de vecteurs propres.

2. Déterminer le spectre de A ainsi qu'une base orthonormée $\mathcal{B}$ de vecteurs propres.
$\mathrm{Sp}(A) = \{2-\sqrt{2}, 2, 2+\sqrt{2}\}$
$E_{2-\sqrt{2}} = \mathrm{Vect}\left\{\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right)\right\}$, $E_2 = \mathrm{Vect}\left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{-\sqrt{2}}{2}\right)\right\}$, $E_{2+\sqrt{2}} = \mathrm{Vect}\left\{\left(\frac{-1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{-1}{2}\right)\right\}$

3. Soit $u \in \mathbb{R}^3$ de coordonnées (x, y, z) dans la base canonique. Exprimer ses coordonnées (x', y', z') dans la base $\mathcal{B}$.
La matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$ est :

$$P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & -1 \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{2} & -1 \end{pmatrix}$$

On a : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = {}^tP\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(x+\sqrt{2}y+z\right) \\ \frac{\sqrt{2}}{2}(x-z) \\ \frac{1}{2}\left(-x+\sqrt{2}y-z\right) \end{pmatrix}$

4. Calculer $(Au|u)$ en fonction de (x, y, z), puis en fonction de (x', y', z').
$(Au|u) = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz.$
$u = Pu'$, $A = PD\,{}^tP$ avec $D = \mathrm{diag}(2-\sqrt{2}, 2, 2+\sqrt{2})$ donc
$(Au|u) = {}^t(Au)u = {}^t(APu')Pu' = {}^tu'\,{}^tP\,{}^tAPu' = {}^tu'Du' = (2-\sqrt{2})x'^2 + 2y'^2 + (2+\sqrt{2})z'^2.$

5. Soit λ la plus petite valeur propre de A. Déduire de ce qui précède que :

$$\forall u \in \mathbb{R}^3, (Au|u) \geq \lambda\|u\|^2.$$

$\lambda = 2-\sqrt{2}$. P étant une matrice orthogonale, on a : $\|u\|^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$.
En minorant chaque valeur propre par λ on obtient :

$$(Au|u) = (2-\sqrt{2})x'^2 + 2y'^2 + (2+\sqrt{2})z'^2 \geq \lambda(x'^2 + y'^2 + z'^2) = \lambda\|u\|^2$$

PARTIE II

On considère un vecteur $b \in \mathbb{R}^3$; pour tout vecteur $u \in \mathbb{R}^3$, on pose :

$$J_b(u) = \frac{1}{2}(Au|u) - (u|b).$$

1. Quels sont les ensembles de départ et d'arrivée de J_b ? Que vaut $J_b(0)$?
J_b est définie sur $\mathbb{R}^3$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, et $J_b(0) = 0$.

2. Calculer le gradient de J_b.
On note $b = (b_1, b_2, b_3)$; alors $J_b(u) = x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - (xb_1 + yb_2 + zb_3)$. On a donc :

$$\nabla J_b(u) = \begin{pmatrix} 2x - y - b_1 \\ -x + 2y - z - b_2 \\ -y + 2z - b_3 \end{pmatrix} = Au - b$$

3. Montrer que

$$J_b(u) \geq \frac{1}{2}\lambda \|u\|^2 - \|b\|\,\|u\|$$

où λ est la plus petite valeur propre de A.
D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a $\forall u \in \mathbb{R}^3, (u|b) \leq |(u|b)| \leq \|u\|\,\|b\|$, donc

$$\forall u \in \mathbb{R}^3, \quad J_b(u) \geq \frac{1}{2}(Au|u) - \|u\|\,\|b\| \geq \frac{\lambda}{2}\|u\|^2 - \|u\|\,\|b\|$$

d'après la question **5** de la partie I.

4. En déduire que la fonction J_b est minorée et non majorée.
Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \frac{\lambda}{2}t^2 - \|b\|t$. C'est une fonction polynomiale qui s'annule pour $t = 0$ et $t = \frac{2\|b\|}{\lambda}$, avec $\frac{\lambda}{2} > 0$; elle admet un minimum pour $t = \frac{\|b\|}{\lambda}$.
D'après la question précédente : $\forall u \in \mathbb{R}^3, J_b(u) \geq f(\|u\|) \geq f\left(\frac{\|b\|}{\lambda}\right)$, ce qui montre que J_b est minorée.
D'autre part, $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = +\infty$, donc l'inégalité $J_b(u) \geq f(\|u\|), \forall u \in \mathbb{R}^3$, montre que J_b n'est pas majorée.

5. Montrer que

$$\inf_{u \in \mathbb{R}^3} J_b(u) \leq 0.$$

L'ensemble $\left\{J_b(u), u \in \mathbb{R}^3\right\}$ est une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$, elle admet donc bien une borne inférieure. De plus, $\inf\limits_{u \in \mathbb{R}^3} J_b(u) \leq J_b(0) = 0$.

6. Montrer que si $\|u\| > \frac{2\|b\|}{\lambda}$, alors $J_b(u) \geq 0$.
D'après l'inégalité de la question **3**, si $\|u\| > \frac{2\|b\|}{\lambda}$, on a :

$$J_b(u) \geq \|u\| \left(\frac{\lambda}{2}\|u\| - \|b\|\right) \geq 0$$

7. En déduire que
$$\inf_{u\in\mathbb{R}^3} J_b(u) = \inf_{u\in\overline{B}(O,r)} J_b(u)$$
où $\overline{B}(O,r)$ désigne la boule fermée de centre l'origine et de rayon $r = \dfrac{2\|b\|}{\lambda}$.

Notons $T = \left\{J_b(u), u\in\mathbb{R}^3\right\}, I = \left\{J_b(u), u\in\overline{B}(O,r)\right\}$ et $E = \left\{J_b(u), u\in\mathbb{R}^3\setminus\overline{B}(O,r)\right\}$.
On a : $\inf I \leq 0$ car $0\in I$, $\inf E \geq 0$ d'après la question précédente, et $T = I\cup E$ donc :
$$\inf_{u\in\mathbb{R}^3} J_b(u) = \inf(T) = \inf(I\cup E) = \min(\inf I, \inf E) = \inf I = \inf_{u\in\overline{B}(O,r)} J_b(u)$$

8. Montrer que la fonction J_b admet un minimum global sur $\mathbb{R}^3$ et qu'il est atteint au point $u = A^{-1}b$.

La fonction polynômiale J_b est continue sur la partie fermée et bornée $\overline{B}(O,r)$, elle atteint donc sa borne inférieure sur cet ensemble (qui est la borne inférieure sur $\mathbb{R}^3$ d'après la question précédente).

La borne inférieure sur $\mathbb{R}^3$ étant atteinte, c'est un minimum global.

Comme $\mathbb{R}^3$ est un ouvert de $\mathbb{R}^3$ et que J_b est de classe C^1, J_b atteint son minimum en un point critique de J_b.

$\nabla J_b(u) = Au - b$ donc $\nabla J_b(u) = 0 \Leftrightarrow Au - b = 0$; A n'admettant pas 0 pour valeur propre est inversible et $Au - b = 0 \Leftrightarrow u = A^{-1}b$.

Ainsi, l'unique point critique de J_b est $A^{-1}b$, c'est donc en ce point que le minimum global est atteint.