Devoir maison 8 - Coniques

Le plan euclidien est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. On considère les points $I(1,0)$ et $J(0,1)$.

a. Soit $M(x,y)$ un point du plan. Donner l'expression de la distance du point M à la droite (OI), puis de la distance du point M à la droite (OJ), et enfin de la distance du point M à la droite (IJ).

Dans la suite, on désigne par $\mathscr{C}$ l'ensemble des points $M(x,y)$ du plan tels que la somme des carrés des distances du point M aux trois côtés du triangle $0IJ$ soit égale à $\dfrac{1}{3}$.

b. Donner une équation cartésienne de $\mathscr{C}$.

c. Donner une équation réduite de $\mathscr{C}$, préciser sa nature.

d. Montrer que $\mathscr{C}$ n'a qu'un point d'intersection avec les droites (OI) et (OJ).
(On dit qu'elles lui sont tangentes.)

e. Tracer $\mathscr{C}$.

2. On considère les ellipses $\mathscr{E}$ et $\mathscr{E}'$ d'équations respectives :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{et} \qquad \frac{x^2}{4a^2} + \frac{y^2}{4b^2} = 1,$$

où a et b désignent deux réels strictement positifs.
On considère la représentation paramétrique de $\mathscr{E}$:

$$\begin{cases} x(t) = a \cos t \\ y(t) = b \sin t \end{cases}$$

et les points N et P de paramètres respectifs t et θ.

a. Déterminer une relation entre t et θ exprimant que la tangente à $\mathscr{E}$ en P est parallèle à la droite (ON).

b. La condition précédente étant vérifiée, déterminer l'aire du triangle NOP.

c. On considère la droite Δ d'équation $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$.
Montrer que Δ est tangente à $\mathscr{E}$ si, et seulement si

$$a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 - \gamma^2 = 0$$

d. Soient u et v deux réels, on considère $U(2a \cos u, 2b \sin u)$ et $V(2a \cos v, 2b \sin v)$ deux points distincts de l'ellipse $\mathscr{E}'$.
Déterminer la relation que doivent vérifier u et v pour que la droite (UV) soit tangente à l'ellipse $\mathscr{E}$.

e. Soient A, B, C trois points distincts de $\mathscr{E}'$ tels que (AB) et (AC) soient tangentes à $\mathscr{E}$.
Montrer que (BC) est tangente à $\mathscr{E}$.

3. Les points P et Q décrivent respectivement m'axe des abscisses et l'axe des ordonnées tout en vérifiant l'égalité $PQ = a + b$.
On considère un point M du segment $[PQ]$ tel que $MP = b$ et $MQ = a$.

a. Quel est l'ensemble des points du plan décrit par le point M ?

b. Faire une figure pour $a = 5$ et $b = 3$.