Devoir maison 8 - Coniques

Le plan euclidien est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. On considère les points $I(1,0)$ et $J(0,1)$.

a. Soit $M(x,y)$ un point du plan. Donner l'expression de la distance du point M à la droite (OI), puis de la distance du point M à la droite (OJ), et enfin de la distance du point M à la droite (IJ).

La distance d'un point $M(x,y)$ à une droite d'équation cartésienne $ax+by+c=0$ est donnée par

$$\frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

On en déduit que

$$d(M;(OI)) = |y| \quad d(M,(OJ)) = |x|; \quad d(M,(IJ)) = \frac{1}{\sqrt{2}}|x+y-1|$$

car les droites $(OI), (OJ)$ et (IJ) ont respectivement pour équation :
$y=0; x=0$ et $x+y-1=0$.

Dans la suite, on désigne par $\mathscr{C}$ l'ensemble des points $M(x,y)$ du plan tels que la somme des carrés des distances du point M aux trois côtés du triangle $0IJ$ soit égale à $\frac{1}{3}$.

b. Donner une équation cartésienne de $\mathscr{C}$.

Une équation cartésienne de $\mathscr{C}$ est :

$$3x^2+2xy+3y^2-2x-2y+\frac{1}{3}=0$$

c. Donner une équation réduite de $\mathscr{C}$, préciser sa nature.

Une équation réduite de $\mathscr{C}$ est

$$12X^2+24Y^2=1$$

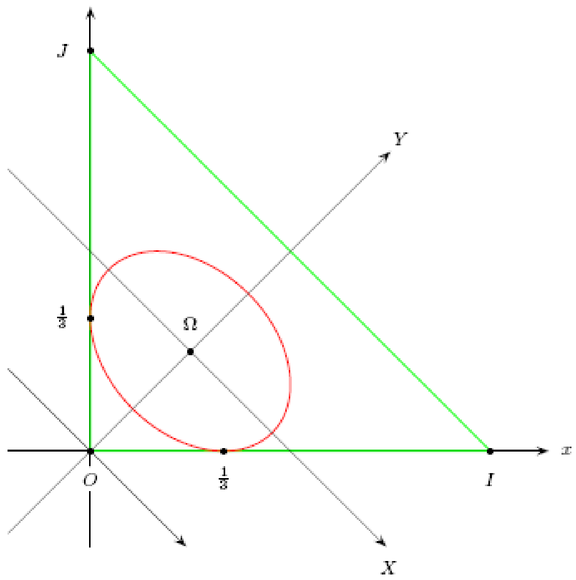
dans le repère $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$ où Ω a pour coordonnées $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ dans le repère initial, et la base $(\vec{u}, \vec{v})$ se déduit que $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ par la rotation d'angle $-\frac{\pi}{4}$.

d. Montrer que $\mathscr{C}$ n'a qu'un point d'intersection avec les droites (OI) et (OJ).
(On dit qu'elles lui sont tangentes.)

$$\mathscr{C} \cap (OI) : \begin{cases} y=0 \\ 3x^2-2x+\frac{1}{3}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ 3\left(x-\frac{1}{3}\right)^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow (x,y) = \left(\frac{1}{3}, 0\right)$$

donc (OI) est tangente à $\mathscr{C}$, et c'est aussi vrai pour (OJ) par symétrie par rapport à la première bissectrice.

e. Tracer $\mathscr{C}$.



2. On considère les ellipses $\mathscr{E}$ et $\mathscr{E}'$ d'équations respectives :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad \text{et} \qquad \frac{x^2}{4a^2}+\frac{y^2}{4b^2}=1,$$

où a et b désignent deux réels strictement positifs.
On considère la représentation paramétrique de $\mathscr{E}$:

$$\begin{cases} x(t)=a\ \cos t \\ y(t)=b\ \sin t \end{cases}$$

et les points N et P de paramètres respectifs t et θ.

a. Déterminer une relation entre t et θ exprimant que la tangente à $\mathscr{E}$ en P est parallèle à la droite (ON).

La tangente à $\mathscr{E}$ en P est dirigée par le vecteur $\begin{pmatrix} -a\ \sin\theta \\ b\ \cos\theta \end{pmatrix}$, donc cette tangente est parallèle à (ON) si, et seulement si :

$$\begin{vmatrix} -a\ \sin\theta & a\ \cos t \\ b\ \cos\theta & b\ \sin t \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow -ab(\sin\theta\ \sin t+\cos\theta\ \cos t)=0 \Leftrightarrow \cos(\theta-t)=0$$

la relation recherchée est donc $\theta-t\equiv\frac{\pi}{2}[\pi]$

b. La condition précédente étant vérifiée, déterminer l'aire du triangle NOP.

L'aire du triangle NOP vaut :

$$\frac{1}{2}\left|\det_{(\vec{\imath},\vec{\jmath})}\left(\overrightarrow{OP},\overrightarrow{ON}\right)\right|=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} a\ \cos\theta & a\ \cos t \\ b\ \sin\theta & b\ \sin t \end{vmatrix}=\frac{ab}{2}\left|\cos\theta\ \sin t-\sin\theta\ \cos t\right|=\frac{ab}{2}\left|\sin(\theta-t)\right|=\frac{ab}{2}$$

c. On considère la droite Δ d'équation $\alpha x+\beta y+\gamma=0$.
Montrer que Δ est tangente à $\mathscr{E}$ si, et seulement si

$$a^2\alpha^2+b^2\beta^2-\gamma^2=0$$

Remarquons tout d'abord que pour que Δ soit une droite, il faut que α et β ne soient pas simultanément nuls.

On va supposer que $\beta \neq 0$ (sinon on procède de manière analogue avec $\alpha \neq 0$).

$$M(x,y) \in \Delta \cap \mathscr{E} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha x + \beta y + \gamma = 0 \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = -\dfrac{1}{\beta}(\alpha x + \gamma) \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{(\alpha x + \gamma)^2}{b^2\beta^2} - 1 = 0 \end{array} \right.$$

La deuxième équation est du second degré : $\left(\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{\alpha^2}{b^2\beta^2}\right) x^2 + \dfrac{2\alpha\gamma}{b^2\beta^2} x + \dfrac{\gamma^2}{b^2\beta^2} - 1 = 0.$

Δ est tangente à $\mathscr{E}$ si seulement si $\Delta \cap \mathscr{E}$ est réduit à un point, et l'équation précédente admet une unique solution si et seulement si son discriminant est nul, c'est-à-dire :

$$\frac{4\alpha^2\gamma^2}{b^4\beta^4} - 4\left(\frac{1}{a^2} + \frac{\alpha^2}{b^2\beta^2}\right)\left(\frac{\gamma^2}{b^2\beta^2} - 1\right) = 0 \Leftrightarrow a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 - \gamma^2 = 0$$

d. Soient u et v deux réels, on considère $U(2a\cos u, 2b\sin u)$ et $V(2a\cos v, 2b\sin v)$ deux points distincts de l'ellipse $\mathscr{E}'$.
Déterminer la relation que doivent vérifier u et v pour que la droite (UV) soit tangente à l'ellipse $\mathscr{E}$.

Déterminons une équation cartésienne de la droite (UV) :

$M(x,y) \in (UV) \Leftrightarrow \det_{(\vec{\imath},\vec{\jmath})}\left(\overrightarrow{UM}, \overrightarrow{UV}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x - 2a\cos u & 2a(\cos v - \cos u) \\ y - 2b\sin u & 2b(\sin v - \sin u) \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow b(\sin v - \sin u)x + a(\cos u - \cos v)y + 2ab\sin(u - v) = 0.$

D'après la question précédente, cette droite est tangente à $\mathscr{E}$ si et seulement si :

$a^2b^2(\sin v - \sin u)^2 + b^2a^2(\cos u - \cos v)^2 - 4a^2b^2\sin^2(u - v) = 0$

$\Leftrightarrow 2 - 2\sin u\ \sin v - 2\cos u\ \cos v - 4\sin^2(u - v) = 0$

$\Leftrightarrow 1 - \cos(u - v) - 2(1 - \cos^2(u - v)) = 0$

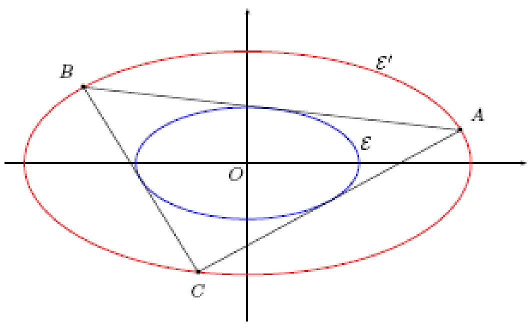
$\Leftrightarrow 2X^2 - X - 1 = 0 \qquad$ en posant $X = \cos(u - v)$

$\Leftrightarrow X = 1$ ou $X = -\dfrac{1}{2}$

$X = 1$ est impossible car sinon on aurait $u \equiv v[2\pi]$ et par suite $U = V$. Il reste donc la condition nécessaire et suffisante $\cos(u - v) = -\dfrac{1}{2}$ c'est-à-dire, $u - v \equiv \pm\dfrac{2\pi}{3}[2\pi]$

e. Soient A, B, C trois points distincts de $\mathscr{E}'$ tels que (AB) et (AC) soient tangentes à $\mathscr{E}$.
Montrer que (BC) est tangente à $\mathscr{E}$.

Notons u, v, w les paramètres respectifs de A, B et C. D'après la question précédente, on a :
$u - v \equiv \pm\dfrac{2\pi}{3}[2\pi], u - w \equiv \pm\dfrac{2\pi}{3}[2\pi]$;
en considérant les différentes possibilités pour les signes, et en remarquant que
$v - w = (u - w) - (u - v)$, on obtient $v - w \equiv \pm\dfrac{2\pi}{3}[2\pi]$.
D'après le résultat précédent, on en déduit que (BC) est tangente à $\mathscr{E}$.



3. Les points P et Q décrivent respectivement m'axe des abscisses et l'axe des ordonnées tout en vérifiant l'égalité $PQ = a + b$.
On considère un point M du segment $[PQ]$ tel que $MP = b$ et $MQ = a$.

a. Quel est l'ensemble des points du plan décrit par le point M ?
Notons $(p, 0)$ et $(0, q)$ les coordonnées de P de Q respectivement. On a :
$PQ^2 = p^2 + q^2 = (a+b)^2$ donc on peut choisir $\begin{cases} p = (a+b)\cos t \\ q = (a+b)\sin t \end{cases}$, où t décrit $\mathbb{R}$.
En posant $M(x, y)$ on a :
$\overrightarrow{PM} = \dfrac{b}{a+b}\overrightarrow{PQ} \Rightarrow \begin{pmatrix} x-(a+b)\cos t \\ y \end{pmatrix} = \dfrac{b}{a+b}\begin{pmatrix} -(a+b)\cos t \\ (a+b)\sin t \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = a\,\cos t \\ y = b\,\sin t \end{cases}$
Ainsi, M décrit l'ellipse $\mathscr{E}$ de la question 2.

b. Faire une figure pour $a = 5$ et $b = 3$.