Devoir maison 7 - Espaces vectoriels normés

Définition : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une application N de E dans $\mathbb{R}$ est une **norme** sur E si elle vérifie :

- $\forall x \in E, N(x) \geq 0$ (**Positivité**)
- $\forall x \in E, N(x) = 0 \Rightarrow x = 0_E$ (**Séparation**)
- $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$ (**Homogénéité**)
- $\forall (x, y) \in E^2, N(x + y) \leq N(x) + N(y)$ (**Inégalité triangulaire**)

Un couple (E, N) où N est une norme sur E s'appelle un **espace vectoriel normé**.
On note souvent une norme $\|\cdot\|$.

1. Soient $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace préhilbertien réel.
Montrer que l'application $\|\cdot\| : x \mapsto \|x\| = \sqrt{(x|x)}$ est une norme sur E.
On l'appelle **norme euclidienne associée** à $(\cdot|\cdot)$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{K}^n$.
Montrer que les applications suivantes sont des normes sur $\mathbb{K}^n$:

a. $\|\cdot\|_1 : x \mapsto \displaystyle\sum_{i=1}^{n} |x_i|$ (appelée *norme 1*) ;

b. $\|\cdot\|_2 : x \mapsto \sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ (appelée *norme 2*) ;

c. $\|\cdot\|_\infty \mapsto \displaystyle\max_{i \in [\![1,n]\!]} |x_i|$ (appelée *norme infinie*)

3. Montrer que $\forall x \in \mathbb{K}^n, \|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\|x\|_2 \leq n\|x\|_\infty$.

4. Pour tout endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$, muni de sa structure euclidienne, on note :

$$|||f||| = \sup_{\|x\|=1} \|f(x)\|$$

a. Montrer que $|||\cdot|||$ définit une norme sur $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.

b. Soit φ un endomorphisme orthogonal de $\mathbb{R}^n$. Calculer $|||\varphi|||$.

c. Soit s est un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^n$ (c'est-à-dire canoniquement associé à une matrice symétrique).
Montrer que $|||s||| = \displaystyle\max_{\lambda \in \mathrm{Sp}(s)} |\lambda|$.