
DEVOIR MAISON 5 - ESPACES PRÉHILBERTIENS

On se place dans un espace euclidien $(E, (\cdot|\cdot))$ de dimension n .

On se donne un vecteur e unitaire, et pour tout réel α non nul, on pose :

$$\forall x \in E, f_\alpha(x) = x + \alpha(x|e)e$$

1. Montrer que $f_\alpha \in \mathcal{L}(E)$.
2. Montrer que $\forall x \in E, \forall y \in E$ on a : $(x|f_\alpha(y)) = (f_\alpha(x)|y)$.
3. Montrer que si F est stable par f_α , alors F^\perp est également stable par f_α .
4. Montrer que 1 est une valeur propre de f_α , et donner l'espace propre associé.
5. Montrer que e est un vecteur propre de f_α , et déterminer la dimension du sous-espace propre associé.
6. f_α est-il diagonalisable ?
7. Montrer que f_α est une isométrie (c'est-à-dire, $\forall x \in E, \|f_\alpha(x)\| = \|x\|$) si et seulement si $\alpha = -2$, et que dans ce cas c'est une symétrie.