Devoir maison 5 - Espaces préhilbertiens

On se place dans un espace euclidien $(E, (\cdot|\cdot))$ de dimension n.
On se donne un vecteur e unitaire, et pour tout réel α non nul, on pose :

$$\forall x \in E, f_\alpha(x) = x + \alpha(x|e)e$$

1. Montrer que $f_\alpha \in \mathcal{L}(E)$.
- Clairement, $\forall x \in E, f_\alpha(x) \in E$.
- $\forall (x, y, \lambda) \in E^2 \times \mathbb{R}$:
  $f_\alpha(\lambda x + y) = (\lambda x + y) + \alpha(\lambda x + y|e)e = (\lambda x + y) + \lambda\alpha(x|e)e + \alpha(y|e)e = \lambda f_\alpha(x) + f_\alpha(y)$.
  f_α est donc linéaire.

2. Montrer que $\forall x \in E, \forall y \in E$ on a : $(x|f_\alpha(y)) = (f_\alpha(x)|y)$.
$\forall (x, y) \in E^2$:
$(x|f_\alpha(y)) = (x|y + \alpha(y|e)e) = (x|y) + \alpha(y|e)(x|e)$ (par linéarité du produit scalaire par rapport à la deuxième variable)
$(f_\alpha(x)|y) = (x + \alpha(x|e)e|y) = (x|y) + \alpha(x|e)(e|y)$ (par linéarité du produit scalaire par rapport à la première variable).
Par symétrie du produit scalaire $(e|y) = (y|e)$ d'où $(x|f_\alpha(y)) = (f_\alpha(x)|y)$.
*Remarque :*On dit que l'endomorphisme f_α est **un endomorphisme symétrique**.

3. Montrer que si F est stable par f_α, alors $F^\perp$ est également stable par f_α.
Soient $x \in F^\perp$ et $y \in F$. D'après la question précédente, $(f_\alpha(x)|y) = (x|f_\alpha(y))$;
si F est stable par f_α, alors $f_\alpha(y) \in F$ et $(f_\alpha(x)|y) = (x|f_\alpha(y)) = 0$.
On a donc $f_\alpha(x) \in F^\perp$, c'est-à-dire $F^\perp$ stable par f_α.

4. Montrer que 1 est une valeur propre de f_α, et donner l'espace propre associé.
1 est valeur propre de f_α si, et seulement s'il existe $x \in E$, $x \neq 0_E$, tel que $f_\alpha(x) = x$.
$f_\alpha(x) = x \Leftrightarrow \alpha(x|e)e = 0 \Leftrightarrow (x|e) = 0 \Leftrightarrow x \in \text{Vect}\{e\}^\perp$
(car e est un vecteur unitaire, donc non nul, et $\alpha \neq 0$.)
Ainsi, 1 est valeur propre de f_α et son sous-espace propre est $E_1 = \text{Vect}\{e\}^\perp$.

5. Montrer que e est un vecteur propre de f_α, et déterminer la dimension du sous-espace propre associé.
$f_\alpha(e) = (1 + \alpha)e$ (car e est unitaire donc $\|e\| = 1$).
Ainsi e est un vecteur propre de f_α associé à la valeur propre $1 + \alpha$.
On a montré que 1 est une valeur propre de f_α de sous-espace propre $E_1 = \text{Vect}\{e\}^\perp$.
On sait que dans un espace euclidien E, pour tout sev F, on a $F \oplus F^\perp = E$;
on sait de plus, que les espaces propres d'un endomorphisme sont en somme directe.
$\alpha \neq 0$, donc $1 + \alpha \neq 1$. Ainsi,le sous-espace propre associé à la valeur propre $1 + \alpha$ est $E_{1+\alpha} = \text{Vect}(e)$, il est de dimension 1.

6. f_α est-il diagonalisable ?
On a $E_1 \oplus E_{1+\alpha} = E$, donc f_α est diagonalisable.

7. Montrer que f_α est une isométrie c'est-à-dire, $\forall x \in E, \|f_\alpha(x)\| = \|x\|$) si et seulement si $\alpha = -2$, et que dans ce cas c'est une symétrie.
Soit $x \in E$; $\|f_\alpha(x)\|^2 = (f_\alpha(x)|f_\alpha(x)) = \|x\|^2 + (\alpha^2 + 2\alpha)(x|e)^2$
$\forall x \in E, \|f_\alpha(x)\| = \|x\| \Leftrightarrow \forall x \in E, (\alpha^2 + 2\alpha)(x|e)^2 = 0$
En prenant en particulier $x = e$, on a : $\alpha^2 + 2\alpha = 0$. Comme $\alpha \neq 0$, on en déduit que $\alpha = -2$.
Pour $\alpha = -2$,on a : $E = E_1 \oplus E_{-1} = \text{Ker}(f_\alpha - \text{Id}) \oplus \text{Ker}(f_\alpha + \text{Id})$.
f_α est donc la symétrie par rapport à E_1 parallèlement à E_{-1}.
Remarque : on peut aussi vérifier que $\forall x \in E, f_\alpha \circ f_\alpha(x) = x$