# Devoir maison 4 - Séries

### Partie 1

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note :

$$v_n = \ln(n!) + n - n\ln n - \frac{\ln n}{2}.$$

**1.** Montrer que la série $\sum (v_{n+1} - v_n)$ converge.

**2.** Justifier que $n! \underset{+\infty}{\sim} C\dfrac{n^{n+\frac{1}{2}}}{\mathrm{e}^n}$ où $C$ est un réel positif.

**3.** On note :

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \mathrm{d}t \qquad \text{(appelées } \textit{intégrales de Wallis}\text{)}$$

Montrer que :

**a.** $I_{n+1} \leq I_n \leq I_{n-1}$, pour $n \geq 1$.

**b.** $(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$.

**c.** $I_{2n} = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\dfrac{\pi}{2} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{C\sqrt{2n}}$.

**d.** $(n+1)I_{n+1}I_n = \dfrac{\pi}{2}$.

**4.** En exploitant les résultats précédents, montrer la *formule de Stirling* :

$$n! \underset{+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

### Partie 2

**1.** Déterminer le rayon de convergence $R$ de la série entière $\sum \dfrac{n!}{1.3...(2n+1)}x^{2n+1}$.

Pour tout $x \in ]R, R[$ on note $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{1.3...(2n+1)}x^{2n+1}$.

**2.** Montrer que $S$ est solution de l'équation différentielle :

$$(x^2 - 2)y' + xy + 2 = 0$$

**3.** Déduire de ce qui précède une expression explicite de $S$.

**4.** La série $S$ est-elle définie pour $x = \sqrt{2}$ ?

*Indication :* utiliser la première partie...