Devoir maison 3 - Réduction des endomorphismes

Exercice 1

Soit E un $\mathbb{C}$-ev de dimension 3, muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Soient u l'endomorphisme de E dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, et v un endomorphisme de E dont la matrice dans $\mathcal{B}$, notée M est telle que $M^n = A$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Déterminer les éléments propres de A, et dire si la matrice est diagonalisable.
$\mathrm{Sp}(A) = \{1; 2\}$, $m(1) = 2, m(2) = 1$; $E_2 = \mathrm{Vect}\{(1; 0; 0)\}$ et $E_1 = \mathrm{Vect}\{(0; 1; 0)\}$.
$\dim(E_1) \neq m(1)$, A n'est donc pas diagonalisable.

2. On note $E_2 = \mathrm{Ker}(u - 2\mathrm{Id})$ et $F_1 = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id})^2$; montrer que ces espaces sont supplémentaires dans E.
$E_2 = \mathrm{Vect}\{(1; 0; 0)\} = \mathrm{Vect}(e_1)$ et $F_1 = \mathrm{Vect}\{(0; 1; 0); (0; 0; 1)\} = \mathrm{Vect}\{e_2, e_3\}$.
La concaténation des bases de E_2 et F_1 donne la base canonique de $\mathbb{R}^3$; les espaces sont donc supplémentaires.

3. Montrer que u et v commutent et que les deux noyaux précédents sont stables par v.
$MA = A^n A = A\, A^n = AM$. Ainsi, les endomorphismes commutent ; on en déduit que : $(u - 2\mathrm{Id}) \circ v = v \circ (u - 2\mathrm{Id})$ et $(u - \mathrm{Id})^2 \circ v = v \circ (u - \mathrm{Id})^2$, donc
$(x \in E_2) \Rightarrow (u(v(x)) - 2v(x) = v(u(x) - 2x) = v(0) = 0) \Rightarrow v(x) \in E_2$ et
$(x \in F_1) \Rightarrow (u - \mathrm{Id})^2(v(x)) = v \circ (u - \mathrm{Id})^2(x) = v(0) = 0) \Rightarrow v(x) \in F_1$.

4. Montrer que M est de la forme $\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$, avec $p \in \mathbb{C}$ et $C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.
$E_2 = \mathrm{Vect}\{e_1\}$ est stable par v donc il existe $p \in \mathbb{C}$ tel que $v(e_1) = pe_1$.
$F_1 = \mathrm{Vect}\{e_2, e_3\}$ est stable par v donc il existe $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2$ et $(\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{C}^2$ tels que : $v(e_2) = \lambda_1 e_2 + \lambda_2 e_3$ et $v(e_3) = \mu_1 e_2 + \mu_2 e_3$. On trouve donc la matrice de v (dans la base canonique) : $M = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & \mu_1 \\ 0 & \lambda_2 & \mu_2 \end{pmatrix}$.

5. Résoudre l'équation $M^n = A$. (On rappelle que E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel !)
On a : $M = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$ donc $A = M^n = \begin{pmatrix} p^n & 0 \\ 0 & C^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
On en déduit dans un premier temps que $p^n = 2$, donc $p \in \{\sqrt[n]{2}\omega^k, k \in [\![0; n-1]\!]\}$, où $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.
Par ailleurs, en notant $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, on a : $C^n = D$. Ainsi, C et D commutent et l'on a : $CD = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_1 + \mu_1 \\ \lambda_2 & \lambda_2 + \mu_2 \end{pmatrix} = DC = \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 & \mu_1 + \mu_2 \\ \lambda_2 & \mu_2 \end{pmatrix}$; on en déduit que $\lambda_2 = 0$ et $\lambda_1 = \mu_2$.
On a donc : $C = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \mu_1 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} = \lambda_1 \mathrm{I}_2 + \begin{pmatrix} 0 & \mu_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Les matrices I_2 et $N = \begin{pmatrix} 0 & \mu_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ commutent, $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, la formule du binôme de Newton donne donc :

$C^n = a^n \mathrm{I}_2 + na^{n-1}N = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1}\mu_1 \\ 0 & a^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On en déduit que : $\lambda_1^n = 1$ d'où $\lambda_1 \in \{\omega^k, k \in [\![0;n-1]\!]\}$ (en particulier $\lambda_1 \neq 0$), puis que : $\mu_1 = \dfrac{1}{na^{n-1}} = \dfrac{a}{n}$ (car $\lambda_1^n = 1$).

Finalement, $M = \begin{pmatrix} \sqrt[n]{2}\omega^k & 0 & 0 \\ 0 & \omega^l & \omega^l/n \\ 0 & 0 & \omega^l \end{pmatrix}$ avec $(k,l) \in [\![0,n-1]\!]^2$.

Exercice 2

L'objectif de l'exercice est de montrer qu'un endomorphisme est diagonalisable si, et seulement s'il admet un polynôme annulateur scindé à racines simples.

u désigne un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(u) = 0$, avec P non nul, scindé à racines simples $\lambda_1, ..., \lambda_p$.

a. Soit $(P_1, ..., P_p)$ la famille de $\mathbb{K}_{p-1}[X]$, définie par :

$$\forall k \in [\![1,p]\!], P_k(X) = \prod_{j \neq k} \frac{X - \lambda_j}{\lambda_k - \lambda_j}$$

Montrer que c'est une base de $\mathbb{K}_{p-1}[X]$ (appelée base d'interpolation de Lagrange).

On remarque dans un premier temps que les polynômes P_k sont de degré $p-1$ (donc dans $\mathbb{K}_{p-1}[X]$), et que $\forall (i,k) \in [\![1,p]\!]^2, P_k(\lambda_i) = \delta_{i,k}$.

Soit $(\mu_1, ..., \mu_p) \in \mathbb{K}^p$ tel que $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} \mu_k P_k = 0$. Alors, $\forall i \in [\![1,p]\!], \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \mu_k P_k(\lambda_i) = \mu_i = 0$.

La famille est donc libre, de cardinal $p = \dim(\mathbb{K}_{p-1}[X])$, c'est donc une base.

b. Soit $Q \in \mathbb{K}_{p-1}[X]$; montrer que : $Q = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} Q(\lambda_k) P_k$.

Soit $Q = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} q_k P_k \in \mathbb{K}_{p-1}[X]$. On a $\forall i \in [\![1,p]\!], Q(\lambda_i) = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} q_k P_k(\lambda_i) = q_i$, d'où $Q = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} Q(\lambda_k) P_k$.

c. En déduire que : $\mathrm{Id}_E = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} P_k(u)$, puis que : $E = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \mathrm{Im}(P_k(u))$.

En prenant $Q = 1$ dans la question précédente, on a : $1 = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} P_k$; pour les polynômes d'endomorphismes en u cette égalité donne : $\mathrm{Id}_E = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} P_k(u)$.

On en déduit que $\forall x \in E, x = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} P_k(u)(x) \in \sum_{k=1}^{p} \mathrm{Im}(P_k(u))$. D'où le second résultat.

d. Montrer que $\forall k \in [\![1,p]\!], \mathrm{Im}(P_k(u)) \subset \mathrm{Ker}(u - \lambda_k \mathrm{Id}_E)$.

On sait que :$(u - \lambda_k \mathrm{Id}_E) \circ P_k(u) = (X - \lambda_k)(u) \circ P_k(u) = ((X - \lambda_k)P_k)(u)$, or le polynôme $(X - \lambda_k)P_k$ est égal à P au coefficient dominant près ; il annule donc u, ce qui prouve que $(u - \lambda_k \mathrm{Id}_E) \circ P_k(u) = 0$.

On en déduit que $\forall k \in [\![0,p]\!]$:

$y \in \mathrm{Im}(P_k(u)) \Rightarrow \exists x \in E, y = P_k(u(x)) \Rightarrow (u - \lambda_k \mathrm{Id}_E)(y) = 0 \Rightarrow y \in \mathrm{Ker}(u - \lambda_k \mathrm{Id}_E)$

e. Conclure.

On déduit des deux questions précédentes que : $\sum_{k=1}^{p} \mathrm{Ker}(u - \lambda_k \mathrm{Id}_E) = E$.

Sachant que les valeurs propres de u sont racines des polynômes annulateurs, en sélectionnant parmi les $\mathrm{Ker}(u - \lambda_k \mathrm{Id}_E)$ ceux qui ne sont pas réduits au vecteur nul, on obtient : $\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u) = E$.

On en conclut que u est diagonalisable.

2. On suppose que u est diagonalisable, de valeurs propres (distinctes) $\lambda_1, ..., \lambda_p$.

Montrer que $P = \prod_{k=1}^{p} (X - \lambda_k)$ est un polynôme annulateur de u.

u étant diagonalisable, $E = \bigoplus_{k=1}^{p} E_{\lambda_k}(u)$; tout vecteur x de E se décompose donc de façon unique sous la forme $x = x_1 + ... + x_p$ avec $\forall i \in [\![1, p]\!], x_i \in E_{\lambda_i}(u)$.

En posant $Q_i = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{p} (X - \lambda_k)$ pour $i \in [\![1, p]\!]$, on a :

$$P(u)(x_i) = (Q_i(X - \lambda_i))(u)(x_i) = Q_i(u) \circ (u - \lambda_i \mathrm{Id}_E)(x_i) = Q_i(u)(0_E) = 0_E$$

Par linéarité, on a $P(u)(x) = 0_E$. Ainsi P annule u.