Devoir maison 2 - Calcul de l'intégrale de Gauss

L'objectif de ce problème est le calcul de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$.

1. Montrer que I converge.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)\mathrm{d}x$.

a. Calculer a_0 et a_1.

b. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < a_{n+1} < a_n$.

c. Pour $n \in \mathbb{N}$, établir une relation de récurrence entre a_n et a_{n+2}.

d. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $na_na_{n-1} = \dfrac{\pi}{2}$.

e. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. A l'aide de l'encadrement $a_{n+1} < a_n < a_{n-1}$, déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}}$.

f. A l'aide des résultats précédents, montrer que $a_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2n}}$.

3. Montrer que $\forall x \in]-1;+\infty[, \ln(1+x) \leq x$.

4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $b_n = \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \mathrm{d}x$ et $c_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}x$.

a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, c_n converge.

b. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n \leq \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x \leq c_n$.

c. A l'aide de changements de variable, exprimer b_n et c_n à l'aide de a_{2n+1} et a_{2n-2}.

5. Déduire de ce qui précède la valeur de I.