Devoir maison 2 - Calcul de l'intégrale de Gauss

L'objectif de ce problème est le calcul de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$.

1. Montrer que I converge.
La fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc localement intégrable.

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^2 f(x) = 0$ (croissances comparées) donc $f(x) = o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$; par comparaison à une intégrale de référence, I converge.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)\mathrm{d}x$.

a. Calculer $a_0 = \dfrac{\pi}{2}$ et $a_1 = 1$.

b. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < a_{n+1} < a_n$.
$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \left]0; \dfrac{\pi}{2}\right[, \cos^n x > 0$ et $\cos^n x - \cos^{n+1} x = \cos^n x(1-\cos x) > 0$; le résultat s'obtient par positivité de l'intégrale.

c. Pour $n \in \mathbb{N}$, établir une relation de récurrence entre a_n et a_{n+2}.
Une intégration par parties, avec $u = \cos^{n+1}$ et $v = \sin$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, donne :
$a_{n+2} = \left[\cos^{n+1} x \sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1)\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \sin^2 x\mathrm{d}x = (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x(1-\cos^2 x)\mathrm{d}x$
$= (n+1)a_n - (n+1)a_{n+2}$, d'où : $(n+2)a_{n+2} = (n+1)a_n$.

d. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $na_na_{n-1} = \dfrac{\pi}{2}$.
L'égalité est vraie pour $n = 1$;
soit $n \in \mathbb{N}^*$, si $na_na_{n-1} = \dfrac{\pi}{2}$, alors d'après la question précédente :
$(n+1)a_{n+1}a_n = na_{n-1}a_n = \dfrac{\pi}{2}$;
par principe de récurrence la propriété est montrée pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

e. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. A l'aide de l'encadrement $a_{n+1} < a_n < a_{n-1}$, déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}}$.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\dfrac{n}{n+1}a_{n-1} < a_n < a_{n-1}$ ainsi, la suite ne s'annulant pas :
$\dfrac{n}{n+1} < \dfrac{a_n}{a_{n-1}} < 1$, le théorème des gendarmes donne : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = 1$.

f. A l'aide des résultats précédents, montrer que $a_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2n}}$.
Le résultat précédent donne $a_n \underset{+\infty}{\sim} a_{n-1}$ avec la relation $na_na_{n-1} = \dfrac{\pi}{2}$, on obtient :
$na_n^2 \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2}$, d'où $a_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2n}}$.

3. Montrer que $\forall x \in]-1;+\infty[, \ln(1+x) \leq x$.
La fonction h définie sur $]-1;+\infty[$ par $h(x) = x - \ln(1+x)$ est dérivable sur son domaine, de dérivée $h'(x) = \dfrac{x}{x+1}$; h est donc décroissante sur $]-1;0]$ puis croissante sur $[0;+\infty[$.
Son minimum atteint en 0 est 0, ainsi la fonction h est positive sur $]-1;+\infty[$.

4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $b_n = \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \mathrm{d}x$ et $c_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}x$.

a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, c_n converge.
Soit $n > 0$. La fonction intégrée est continue sur $[0;+\infty[$ donc localement intégrable.
$\left(1 + \dfrac{x^2}{n}\right)^{-n} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{n^n}{x^{2n}}$; par comparaison à une intégrale de référence, c_n converge.

b. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n \leq \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{d}x \leq c_n$.

$\forall x \in \left[0;\sqrt{n}\right[, -\dfrac{x^2}{n} \in]-1;0]$ donc, d'après l'inégalité prouvée à la question 3,
$\ln\left(1 - \dfrac{x^2}{n}\right) \leq -\dfrac{x^2}{n}$ et, par croissance de la fonction exponentielle : $\mathrm{e}^{n\ln\left(1-\frac{x^2}{n}\right)} \leq \mathrm{e}^{-n\frac{x^2}{n}}$.
Par positivité de l'intégrale, on obtient : $b_n \leq \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{d}x$.
$\forall x \geq 0$, d'après l'inégalité prouvée à la question 3, $-\dfrac{x^2}{n} \leq -\ln\left(1 + \dfrac{x^2}{n}\right)$ et, par croissance de la fonction exponentielle : $\mathrm{e}^{-n\frac{x^2}{n}} \leq \mathrm{e}^{-n\ln\left(1+\frac{x^2}{n}\right)}$.
Par positivité de l'intégrale, $\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{d}x \leq \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}x \leq c_n$, la deuxième inégalité résultant de la positivité de la fonction intégrée et de la croissance de l'intégrale.

c. A l'aide de changements de variable, exprimer b_n et c_n à l'aide de a_{2n+1} et a_{2n-2}.
Pour b_n, on effectue le changement de variable $x = \sqrt{n}\,\sin t$:
$b_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{n}\cos t(1 - \sin^2 t)^n \mathrm{d}t = \sqrt{n} a_{2n+1}$.
Pour c_n, on effectue le changement de variable $x = \sqrt{n}\tan t$:
$c_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{n} \frac{\mathrm{d}t}{(1+\tan^2 t)^{n-1}} = \sqrt{n} a_{2n-2}$.

5. Déduire de ce qui précède la valeur de I.
$b_n = \sqrt{n}\, a_{2n+1} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$; $c_n = \sqrt{n}\, a_{2n-2} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{d}x = I$.
On obtient $I = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.