Devoir maison 1 - Algèbre linéaire

On considère un $\mathbb{K}$-espace vectoriel noté E, et on note $\mathcal{S}(E) = \{u \in \mathcal{L}(E) / u^3 = u^2\}$.

1. Soit l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ f(x, y, z) = (0, x, z)$$

a. Montrer que $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$. $f^2(x, y, z) = f^3(x, y, z) = (0, 0, z)$ donc $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$.

b. Déterminer $\text{Ker}(f)$ $=\text{Vect}\{(0; 1; 0)\}$ et $\text{Im}(f)$ $=\text{Vect}\{(0; 1; 0); (0; 0; 1)\}$.

2. On considère maintenant un endomorphisme u de $\mathcal{S}(E)$.

a. Montrer que u est inversible si, et seulement si $u = \text{Id}_E$.

Si $u = \text{Id}_E$, u est inversible.

Réciproquement, si u est inversible, sachant que $u^3 = u^2$ ce qui équivaut à $u^2 \circ (u - \text{Id}_E) = 0$, en composant deux fois à gauche par u^{-1}, on obtient $u - \text{Id}_E = 0$ d'où $u = \text{Id}_E$.

b. Soit $\lambda \in \mathbb{K} - \{0; -1\}$. Montrer que l'endomorphisme $v = u + \lambda \text{Id}_E$ est inversible.

On a $u = v - \lambda \text{Id}_E$, et comme $u^3 = u^2$, on a : $(v - \lambda \text{Id}_E)^3 = (v - \lambda \text{Id}_E)^2$;

v et Id_E commutent, on peut donc appliquer la formule du binôme et on obtient :

$v^3 + (-3\lambda - 1)v^2 + (3\lambda^2 + 2\lambda)v - (\lambda^3 + \lambda)\text{Id}_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$. $\lambda \notin \{0; -1\}$ donc $\lambda^3 + \lambda \neq 0$;

on en déduit que v est inversible et $v^{-1} = \dfrac{1}{\lambda^3 + \lambda}(v^2 + (-3\lambda - 1)v + (3\lambda^2 + 2\lambda)\text{Id}_E)$.

c. Montrer que si $\text{Ker}(u) = \text{Ker}(u^2)$, alors u est un projecteur.

Soit $x \in E$; comme $u^3(x) = u^2(x)$, on a : $u^2(u(x) - x) = 0$ donc $u(x) - x \in \text{Ker}(u^2)$.

Comme $\text{Ker}(u^2)$=$\text{Ker}(u)$, on a $u(x) - x \in \text{Ker}(u)$ et donc $u^2(x) = u(x)$.

On en déduit que u, endomorphisme de E, est un projecteur.

3. On suppose dans cette question que u n'est pas injectif et que $\text{Ker}(u) \neq \text{Ker}(u^2)$.

a. Déterminer u^n pour $n \geq 3$.

Comme $u^3 = u^2$, une récurrence immédiate donne $u^n = u^2, \forall n \geq 3$.

b. En déduire que $\text{Ker}(u^2) \oplus \text{Im}(u^2) = E$.

D'après la question précédente, on a en particulier $u^4 = u^2$; ainsi u^2 est un projecteur donc $\text{Ker}(u^2) \oplus \text{Im}(u^2) = E$.

c. Montrer que $\text{Im}(u^2)$ est stable par u, et déterminer la restriction de u à $\text{Im}(u^2)$.

Soit $y \in \text{Im}(u^2)$; il existe $x \in E$ tel que $y = u^2(x)$, alors $u(y) = u^2(u(x))$ donc $u(y) \in \text{Im}(u^2)$.

De plus, $u(y) = u^3(x) = u^2(x) = y$ donc la restriction de u à $\text{Im}(u^2)$ est $\text{Id}_{\text{Im}(u^2)}$.

d. Soit v la restriction de u à $\text{Ker}(u^2)$.

Montrer que v est nilpotent (c'est-à-dire : $\exists p \in \mathbb{N} / v^p = 0_{\mathcal{L}(\text{Ker}(u^2))}$).

Soit $x \in \text{Ker}(u^2)$; $v^2(x) = u^2(x) = 0$; ainsi $v^2 = 0_{\mathcal{L}(\text{Ker}(u^2))}$, donc v est nilpotent.