Devoir maison 11 - transformée de Fourier

Pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ et tout réel x, on note, lorsqu'elle existe :

$$\widehat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-ixt} f(t)\mathrm{d}t$$

Quand elle est définie, la fonction $\widehat{f}$ s'appelle la **transformée de Fourier** de f.

1. Transformée de Fourier d'une fonction intégrable

Dans cette question, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est une fonction continue, et intégrable sur $\mathbb{R}$.

a. Montrer que $\widehat{f}(x)$ est défini pour tout $x \in \mathbb{R}$, et que la fonction $\widehat{f}$ est continue et bornée.

- $\forall x \in \mathbb{R}, t \mapsto \mathrm{e}^{-ixt} f(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$ car f et la fonction exponentielle le sont.
- $\forall t \in \mathbb{R}, x \mapsto \mathrm{e}^{-ixt} f(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$, car la fonction exponentielle l'est.
- $\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2, |\mathrm{e}^{-ixt} f(t)| \leq |f(t)|$ et f est intégrable sur $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ est absolument convergente).

Le théorème de continuité des fonctions définies à l'aide d'une intégrale dépendant d'un paramètre donne la continuité de $\widehat{f}$.
De plus, par majoration par une fonction positive intégrable, on a :

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-ixt} f(t)\mathrm{d}t \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\mathrm{d}t$$

ce qui prouve que $\widehat{f}$ est bornée.

b. Vérifier que pour tout réel $a \neq 0$, les fonctions $f_{Ta} : t \mapsto f(t-a)$ et $f_{Ha} : t \mapsto f(at)$ admettent des transformées de Fourier, et montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \widehat{f_{Ta}}(x) = \mathrm{e}^{-iax}\widehat{f}(x) \quad \text{et} \quad \widehat{f_{Ha}}(x) = \frac{1}{a}\widehat{f}\left(\frac{x}{a}\right)$$

Pour $a \neq 0$ les $t \mapsto t-a$ et $t \mapsto at$ sont des bijections de classe C^1. On effectue les changements de variable associés et on obtient :
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-ixt} f(t-a)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-ix(u+a)} f(u)\mathrm{d}u = \mathrm{e}^{-ixa} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-ixu} f(u)\mathrm{d}u$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-ixt} f(at)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-ix\frac{u}{a}} f(u)\frac{1}{a}\mathrm{d}u = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-i\frac{x}{a}u} f(u)\mathrm{d}u.$$
On obtient ainsi l'existence des transformées de Fourier, et les égalités attendues.

c. Exprimer de même la transformée de Fourier de $t \mapsto \mathrm{e}^{iat} f(t)$ en fonction de celle de f, après avoir justifié qu'elle existe.
La fonction $h : t \mapsto \mathrm{e}^{iat} f(t)$ est continue car f l'est ainsi que la fonction exponentielle ;
de plus, $\forall t \in \mathbb{R}, |\mathrm{e}^{iat} f(t)| = |f(t)|$ donc $|f|$ étant intégrable sur $\mathbb{R}$, h l'est également.
D'après la première question h admet donc une transformée de Fourier ;
de plus on a : $\widehat{h}(x) = \widehat{f}(x-a)$.

d. Si f est paire, donner une expression de sa transformée de Fourier sous forme d'une intégrale sur $[0, +\infty[$.
Si f est paire, $\forall x \in \mathbb{R}$:
$$\widehat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\cos(xt) + i\sin(xt))\, f(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(xt) f(t)\mathrm{d}t + i\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(xt) f(t)\mathrm{d}t$$

d'où $\widehat{f}(x) = 2\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(xt)f(t)\mathrm{d}t$, car $t \mapsto \cos(xt)f(t)$ est paire et $t \mapsto \sin(xt)f(t)$ est impaire.

e. Même question si f est impaire.

Comme dans la question précédente, on trouve : $\widehat{f}(x) = 2i\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(xt)f(t)\mathrm{d}t$.

f. Que peut-on dire de la transformée de Fourier d'une fonction réelle paire ? réelle impaire ?

On déduit des questions précédentes que la transformée de Fourier d'une fonction réelle paire est réelle et paire et que la transformée de Fourier d'une fonction réelle impaire est imaginaire pure, et impaire.

2. Dérivation

On considère $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, et on suppose que f et f' sont intégrables sur $\mathbb{R}$.

a. Montrer que f tend vers 0 en $\pm\infty$.

On traite le cas $+\infty$, le cas $-\infty$ étant similaire.

D'après le théorème fondamental d'intégration : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(0) + \displaystyle\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t$.

f' est intégrable sur $[0, +\infty[$ donc f admet une limite finie l en $+\infty$.

Si $l \neq 0$ alors : $\exists A > 0, \forall x \geq A, |f(x)| \geq \dfrac{|l|}{2}$; ainsi, on aurait :

$\forall B > A, \displaystyle\int_0^B |f(t)|\mathrm{d}t \geq \int_A^B |f(t)|\mathrm{d}t \geq (B - A)\frac{|l|}{2} \underset{B\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, ce qui contredit le fait que f est intégrable sur $\mathbb{R}$.

On en déduit que $l = 0$.

b. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \widehat{f'}(x) = ix\widehat{f}(x)$, puis en déduire que $\widehat{f}$ tend vers 0 en $\pm\infty$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Les fonctions f et exponentielle sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$; $\displaystyle\lim_{t\to\pm\infty} f(t)\mathrm{e}^{-ixt} = 0$, donc le théorème d'intégration pas parties donne :

$\widehat{f'}(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)\mathrm{e}^{-ixt}\mathrm{d}t = 0 - \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)(-ix\mathrm{e}^{-ixt})\mathrm{d}t = ix\widehat{f}(x)$.

c. On suppose de plus que $\varphi : t \mapsto tf(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.
Montrer que $\widehat{f}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \left(\widehat{f}\right)'(x) = -i\widehat{\varphi}(x).$$

$\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2$, on note $g(x,t) = \mathrm{e}^{-ixt}f(t)$.

- $\forall x \in \mathbb{R}, t \mapsto g(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ d'après la question 1 ;
- $\forall t \in \mathbb{R}, x \mapsto g(x,t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ car f est la fonction exponentielle le sont ;
- $\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2, \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t) = -it\mathrm{e}^{-ixt}f(t)$;
  $\forall x \in \mathbb{R}, t \mapsto \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$ (car f est la fonction exponentielle le sont) ;
- $\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2, \left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leq |tf(t)|$ qui est intégrable sur $\mathbb{R}$ par hypothèse.

D'après le théorème de dérivation des fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre, $\widehat{f}$ est donc de classe C^1 et :

$\forall x \in \mathbb{R}, \left(\widehat{f}\right)'(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-ixt}(-itf(t))\mathrm{d}t = -i\widehat{g}(x)$.