Devoir maison 10 - équation aux dérivées partielles

U désigne un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$, et $\lambda \in \mathbb{R}$. On considère l'équation aux dérivées partielles

$$E_\lambda : x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lambda f(x,y).$$

On note $S_\lambda(U)$ l'ensemble des fonctions réelles définies sur U, de classe C^1, solutions de E_λ.

PARTIE I : Généralités

1. Vérifier que les applications $p_x : (x,y) \mapsto x$ et $p_y : (x,y) \mapsto y$ appartiennent à $S_1(\mathbb{R}^2)$.
p_x et p_y sont de classe C^1.
$\frac{\partial p_x}{\partial x}(x,y) = 1$, $\frac{\partial p_x}{\partial y}(x,y) = 0$, $\frac{\partial p_y}{\partial x}(x,y) = 0$, $\frac{\partial p_y}{\partial y}(x,y) = 1$ donc :
$x\frac{\partial p_x}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial p_x}{\partial y}(x,y) = x = 1.p_x(x,y)$ donc $p_x \in S_1(\mathbb{R}^2)$ et
$x\frac{\partial p_y}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial p_y}{\partial y}(x,y) = y = 1.p_y(x,y)$ donc $p_y \in S_1(\mathbb{R}^2)$.

2. Soit $f \in S_\lambda(U)$ de classe C^2. Montrer que $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ appartiennent à $S_{\lambda-1}(U)$.

f est de classe C^2 donc $\frac{\partial f}{\partial x}$ est de classe C^1 sur U.
En dérivant $x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lambda f(x,y)$ par rapport à x, on obtient :
$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + x\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + y\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \lambda\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ donc, f étant de classe C^2, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ et on a : $x\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + y\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = (\lambda - 1)\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ donc $\frac{\partial f}{\partial x}$ est solution de $E_{\lambda-1}$.
La démarche est la même pour $\frac{\partial f}{\partial y}$.

3. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que si $f \in S_\lambda(U)$ et $g \in S_\mu(U)$ alors $fg \in S_\theta(U)$ pour un réel θ que l'on précisera en fonction de λ et μ.
Par produit, fg est de classe C^1 sur U et on a :
$x\frac{\partial (fg)}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial (fg)}{\partial y}(x,y) =$
$x\left(f(x,y)\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) + g(x,y)\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right) + y\left(f(x,y)\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) + g(x,y)\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) =$
$f(x,y)\left(x\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\right) + g(x,y)\left(x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = (\mu + \lambda)f(x,y)g(x,y)$.
Donc $fg \in S_{\lambda+\mu}(U)$

4. Soit $f \in S_\lambda(U)$ telle que $\forall (x,y) \in U, f(x,y) > 0$.
Montrer que pour $\alpha \in \mathbb{R}, f^\alpha : (x,y) \mapsto (f(x,y))^\alpha$ appartient à $S_{\alpha\lambda}(U)$.
Par composition, f^α est de classe C^1 sur U et on a :
$x\frac{\partial (f^\alpha)}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial (f^\alpha)}{\partial y}(x,y) = x\alpha\left(f(x,y)\right)^{\alpha-1}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\alpha\left(f(x,y)\right)^{\alpha-1}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$
$= \alpha\left(f(x,y)\right)^{\alpha-1}\lambda f(x,y) = \alpha\lambda(f(x,y))^\alpha$.
Donc $f^\alpha \in S_{\alpha\lambda}(U)$.

PARTIE II : Résolution sur $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}$

Dans cette partie, $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}$.

1. Justifier que l'application $\Phi : U \to \mathbb{R}^2$ définie par $\Phi(u,v) = (uv, v)$ réalise une bijection de U sur U, et déterminer sa bijection réciproque.

Φ est bien définie sur U à valeurs dans U.

Considérons $\Psi : (x,y) \mapsto \left(\frac{x}{y}, y\right)$, elle est également définie sur U à valeurs dans U.

Comme $\Phi \circ \Psi = \Psi \circ \Phi = \mathrm{Id}_U$, Φ est bijective, et $\Phi^{-1} = \Psi$.

2. Soient $f \in C^1(U, \mathbb{R})$ et $g : U \to \mathbb{R}$ définie par $g = f \circ \Phi$.

a. Justifier que g est de classe C^1, et exprimer $\frac{\partial g}{\partial u}$ et $\frac{\partial g}{\partial v}$ en fonction de $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.

f est Φ étant de classe C^1, g est de classe C^1.

$\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = \frac{\partial}{\partial u}\left(f(uv,v)\right) = v\frac{\partial f}{\partial x}(uv,v)$ et $\frac{\partial g}{\partial v}(u,v) = \frac{\partial}{\partial v}\left(f(uv,v)\right) = u\frac{\partial f}{\partial x}(uv,v) + \frac{\partial f}{\partial y}(uv,v)$.

b. Justifier que $f \in S_\lambda(U)$ si, et seulement si g est solution sur U de l'équation

$$(E) : v\frac{\partial g}{\partial v} = \lambda g(u,v).$$

$f \in S_\lambda(U) \Leftrightarrow \forall (x,y) \in U, x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lambda f(x,y)$

$\Leftrightarrow \forall (u,v) \in U, uv\frac{\partial f}{\partial x}(uv,v) + v\frac{\partial f}{\partial y}(uv,v) = \lambda f(uv,v) \Leftrightarrow \forall (u,v) \in U, v\frac{\partial g}{\partial v}(u,v) = \lambda g(u,v)$.

c. Résoudre (E) et décrire $S_\lambda(U)$.

Soit g solution sur U de $v\frac{\partial g}{\partial v}(u,v) = \lambda g(u,v)$.

Pour u fixé, l'application partielle $v \mapsto g(u,v)$ est solution sur $\mathbb{R}^{+*}$ de l'équation différentielle $xy' = \lambda y$ dont les solutions sont $y(x) = Cx^\lambda$.

On en déduit que : $\exists C : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $g(u,v) = C(u)v^\lambda$.

g étant de classe C^1, $C : u \mapsto \frac{g(u,v)}{v^\lambda}$ l'est aussi.

Ainsi, g est de la forme $g(u,v) = C(u)v^\lambda$ avec C une fonction de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

La réciproque est immédiate.

En conclusion, $S_\lambda(U) = \left\{(x,y) \mapsto C\left(\frac{x}{y}\right)y^\lambda, C \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})\right\}$.

PARTIE III : Résolution sur $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0\}$

Dans cette partie, $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0\}$.

1. Soit $f \in C^2(U, \mathbb{R})$.

a. Soit $(x,y) \in U$ fixé. Pour $t \in \mathbb{R}^{+*}$, on pose $\varphi(t) = f(tx, ty)$.
Justifier que φ est de classe C^1, et calculer φ'.

$t \mapsto (tx, ty)$ est C^1 donc par composition φ l'est aussi.

$\varphi'(t) = x\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty) + y\frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty)$.

b. Etablir : $f \in S_0(U) \Leftrightarrow (\forall (x,y) \in U, \forall t > 0, f(tx,ty) = f(x,y))$.

Si $f \in S_0(U)$ alors $\forall t \in \mathbb{R}^{+*}, t\varphi'(t) = 0$ donc $\varphi'(t) = 0$.

On en déduit que φ est constante égale à $\varphi(1)$ donc $\forall t > 0, f(tx,ty) = f(x,y)$.

Réciproquement, si $\forall t > 0, f(tx,ty) = f(x,y)$, en dérivant par rapport à t, on obtient :
$x\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty) + y\frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty) = 0$, avec $t = 1$ on obtient $f \in S_0(U)$.

c. En déduire que les solutions de E_0 sur U sont des fonctions de la forme :

$$(x,y) \mapsto \psi\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), \quad \text{où } \ \psi \in C^1(U,\mathbb{R})$$

Si $f \in S_0(U)$, alors en prenant $t = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ dans la relation établie à la question précédente on a $f(x,y) = f\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$, donc f a la forme attendue (avec $\psi = f$).

Réciproquement, si $f(x,y) = \psi\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ avec $\psi \in C^1(U,\mathbb{R})$, alors f est de classe C^1 par composition, et vérifie $\forall (x,y) \in U, \forall t > 0, f(x,y) = f(tx,ty)$ donc $f \in S_0(U)$.

2. Soient $r_\lambda : U \to \mathbb{R}$ définie par $r_\lambda(x,y) = \left(x^2+y^2\right)^{\frac{\lambda}{2}}$, et $g : U \to \mathbb{R}$ définie par $g(x,y) = f(x,y)r_{-\lambda}(x,y)$.

a. Justifier que $r_\lambda \in S_\lambda(U)$.

$r_\lambda = \left(p_x^2+p_y^2\right)^{\frac{\lambda}{2}}$. D'après la question **1** de la partie I, p_x et p_y sont dans $S_1(\mathbb{R})$, donc d'après la question **4** de la partie I, p_x^2 et p_y^2 sont dans $S_2(U)$.
$\forall \lambda \in \mathbb{R}, S_\lambda(U)$ est clairement un sous-espace vectoriel de $C^1(U,\mathbb{R})$, on en déduit que $p_x^2+p_y^2$ est dans $S_2(U)$ puis, toujours d'après la question **4** de la partie I, que r_λ est dans $S_\lambda(U)$.

b. Montrer que $f \in S_\lambda(U) \Leftrightarrow g \in S_0(U)$.

$\Rightarrow$ Si $f \in S_\lambda(U)$, alors d'après la question **3** de la partie I, $g = f\, r_{-\lambda} \in S_0(U)$.
$\Leftarrow$ Si $g \in S_0(U)$, alors $f = g\, r_\lambda \in S_\lambda(U)$.

c. En déduire $S_\lambda(U)$.

Les solutions de E_λ sur U sont les fonctions de la forme :
$(x,y) \mapsto \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^\lambda \psi\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ avec $\psi \in C^1(U,\mathbb{R})$