$\star$ Spé - St Joseph/ICAM Toulouse $\star$

Math. - CC 3 - S1 - Algèbre

vendredi 13 décembre 2019 - Durée 1 h

Toutes les réponses seront justifiées. La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction.

Dans tout l'exercice, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

Partie 1 - Produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$

Pour tout couple $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$, on note :

$$(P|Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$$

1. Justifier que l'intégrale définissant $(P|Q)$ est convergente.

2. Montrer alors que l'application $(\cdot|\cdot)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

3. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\int_0^{+\infty} t^k\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = k\int_0^{+\infty} t^{k-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$$

4. Conclure que :

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ (X^k|1) = k!$$

Partie 2 - Construction d'une base orthogonale

On considère l'application u définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ u(P) = XP'' + (1 - X)P'$$

1. a. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

b. Ecrire la matrice de u dans la base $(1, X, X^2, \cdots X^n)$. de $\mathbb{R}_n[X]$.

c. En déduire que u est diagonalisable et que le spectre de u est

$$\mathrm{Sp}(u) = \{-k,\ k \in [\![0, n]\!]\}$$

2. On fixe $k \in [\![0, n]\!]$.

a. Quelle est la dimension de Ker $\left(u + k\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[X]}\right)$?

b. En déduire qu'il existe un unique polynôme $P_k \in \mathbb{R}_n[X]$, de coefficient dominant égal à 1, vérifiant

$$u(P_k) = -kP_k$$

c. Justifier que le degré de P_k est k.

d. Déterminer P_0, P_1, et vérifier que $P_2 = X^2 - 4X + 2$.

3. On fixe un couple $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$.

a. Montrer que

$$(u(P)|Q) = -\int_0^{+\infty} tP'(t)Q'(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$$

b. En déduire que

$$(u(P)|Q) = (P|u(Q))$$

c. Montrer que $(P_0, P_1, \cdots, P_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.

Fin de l'énoncé d'algèbre