⋆ Spé - St Joseph/ICAM Toulouse ⋆

# Math. - CC 3 - S1 - Algèbre

vendredi 14 décembre 2018 - Durée 1 h

*Toutes les réponses seront justifiées. La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction.*

## Exercice 1

Dans $E = \mathbb{R}^4$, muni du produit scalaire canonique, on considère les vecteurs :

$$u_1 = (1, 0, 1, 0),\ u_2 = (1, -1, 0, 0),\ \text{ et }\ u_3 = (1, 1, 1, 1).$$

On note $F = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3)$.

**1.** Vérifier que $(u_1, u_2, u_3)$ est une base de $F$.

**2.** Déterminer une base de $F^{\perp}$.

**3.** Déterminer une base orthonormée de $F$.

**4.** Déterminer la projection orthogonale sur $F$ de $v = (1, 1, 1, 0)$ de deux façons différentes.

**5.** Calculer la distance de $v$ à $F$.

## Exercice 2

On considère l'espace vectoriel $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre $n \geq 2$.
Pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on note $\mathrm{Tr}(A)$ la trace de la matrice $A$. On définit l'application $\varphi$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\forall (A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2,\ \varphi(A, B) = \mathrm{Tr}(A\,{}^tB)$$

**1.** Montrer que $\varphi$ est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

**2. a.** Enoncer l'inégalité de Cauchy Schwarz pour le produit scalaire $\varphi$.

**b.** Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ ; montrer que :

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \right| \leq n \times \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2}$$

**3.** On suppose désormais que $n = 2$. On appelle $F$ le sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ défini par

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} ; (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

**a.** Donner une base de $F^{\perp}$.

**b.** Déterminer l'image de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ par la projection orthogonale sur $F$.

**Fin de l'énoncé d'algèbre**