⋆ Spé - St Joseph/ICAM Toulouse ⋆

Math. - CC 1 - S1 - Algèbre

vendredi 05 octobre 2018 - Durée 1 h

Toutes les réponses seront justifiées. La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction.

Exercice 1

Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique (e_1, e_2, e_3), on considère l'endomorphisme u défini par :

$$u(x, y, z) = (-x, 2x + y, -2x - 2y - z)$$

Soient $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ et ε_3 les vecteurs définis par :

$$\varepsilon_1 = e_2 - e_3,\ \varepsilon_2 = -e_1 + e_2 - e_3,\ \varepsilon_3 = e_1 - e_2 + 2e_3$$

1. Montrer que $\mathscr{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

2. Déterminer la matrice de u dans $\mathscr{B}$.

3. Que peut-on en déduire ?

Exercice 2

On considère deux entiers n et p tels que $2 \leq p \leq n$. E désigne un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K}$. $f_1, f_2, ..., f_p$ sont p endomorphismes non nuls de E tels que

$$f_1 + f_2 + \cdots + f_p = \mathrm{Id}_E \quad \text{et} \quad f_i \circ f_j = 0, \text{ pour tout } \ i \neq j$$

Soient $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p$ des éléments de $\mathbb{K}$ deux à deux distincts. On note $f = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \cdots + \alpha_p f_p$.

1. Montrer que pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, f_i est un projecteur de E.

2. Calculer $f^k = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{k \text{ fois}}$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

3. Montrer que $\{f_1, f_2, \cdots, f_p\}$ est une famille libre.

4. Montrer que

$$E = \mathrm{Im} f_1 \oplus \mathrm{Im} f_2 \oplus \cdots \oplus \mathrm{Im} f_p$$

5. Montrer que la famille $\{\mathrm{Id}_E, f, f^2, \cdots, f^{p-1}\}$ est libre.

6. Pour $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$, on définit l'endomorphisme $P(f)$ par : $P(f) = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k f^k$.

Pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, on note $P_i = \displaystyle\prod_{\substack{1 \leq k \leq p \\ k \neq i}} \frac{X - \alpha_k}{\alpha_i - \alpha_k}$.

Montrer que pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, P_i est le seul polynôme de $\mathbb{K}_{p-1}[X]$ vérifiant $P_i(f) = f_i$.

Fin de l'énoncé d'algèbre