⋆ Spé - St Joseph/ICAM Toulouse ⋆

Math. - CC 2 - S1 - Algèbre

vendredi 24 novembre 2017 - Durée 1 h

Toutes les réponses seront justifiées. La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction.

Exercice 1

Soient les suites réelles $(u_n), (v_n)$ et (w_n) définies par :

$$(u_0, v_0, w_0) = (1, 1, -1) \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = u_n - v_n + w_n \\ v_{n+1} = -u_n + v_n + w_n \\ w_{n+1} = -u_n - v_n + 3w_n \end{cases}$$

1. Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ est diagonalisable, et la diagonaliser.

2. Déterminer la matrice A^n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. Expliciter les termes u_n, v_n et w_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2

E désigne un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit p un projecteur de E.

a. Montrer que $\mathrm{Im}(p)$ et $\mathrm{Ker}(p)$ sont supplémentaires dans E.

b. Montrer que le spectre de p est $\{0, 1\}$, et déterminer ses espaces propres.

c. En déduire que $\mathrm{Tr}(p) = \mathrm{rg}(p)$ (où $\mathrm{Tr}(p)$ désigne la trace de p).

d. Soit u un endomorphisme de E tel que $\mathrm{Tr}(u) = \mathrm{rg}(u)$. u est-il nécessairement un projecteur ?

2. Soit u un endomorphisme de E de rang 1.

a. Montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que la matrice de u dans $\mathscr{B}$ est de la forme :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}), \qquad \text{où} \quad a_1, a_2, \cdots a_n \text{ sont des réels}$$

b. Montrer que u est diagonalisable si, et seulement si la trace de u est non nulle.

c. On suppose que $\mathrm{Tr}(u) = \mathrm{rg}(u)$. Montrer que u est un projecteur.

d. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Justifier sans calcul que A est la matrice d'un projecteur, puis en donner les éléments caractéristiques.

Fin de l'énoncé d'algèbre