$\star$ Spé - St Joseph/ICAM Toulouse $\star$

Math. - CC 1 - S2 - Algèbre - Géométrie

vendredi 06 octobre 2017 - Durée 2h

Toutes les réponses seront justifiées. La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction.

Exercice 1

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = \left(0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$.
On note S la surface d'équation

$$(E): \quad xy + \sqrt{3}(x+y)z = 0$$

c'est-à-dire l'ensemble des points de l'espace dont les coordonnées vérifient l'équation (E).

1. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \sqrt{3} \\ 1 & 0 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$$

a. Justifier, <u>sans calcul</u>, que A est diagonalisable.

b. Donner le spectre de A.

c. Montrer qu'il existe un repère orthonormé $\mathcal{R}_1 = \left(0, \overrightarrow{i_1}, \overrightarrow{j_1}, \overrightarrow{k_1}\right)$, pour lequel les coordonnées sont notées (x_1, y_1, z_1), tel que l'équation de S dans $\mathcal{R}_1$ soit :

$$x_1^2 + 2y_1^2 - 3z_1^2 = 0$$

<u>**On ne demande pas de déterminer les vecteurs $\vec{i_1}, \vec{j_1}, \vec{k_1}$.**</u>

2. Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation

$$x + y = \sqrt{2}$$

dans le repère initial $\mathcal{R}$.

a. Donner la matrice, dans la base canonique, de la rotation r d'axe Vect $\left(\overrightarrow{k}\right)$ et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$.

b. On note $\left(\overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}, \overrightarrow{K}\right)$ l'image par r de la base $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$. Justifier que cette nouvelle base est orthonormée.

c. On note $\mathcal{R}_2$ le repère $\left(O, \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}, \overrightarrow{K}\right)$, et (X, Y, Z) les coordonnées dans ce repère.
Déterminer les équations de S et $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{R}_2$.

d. Donner la nature de la courbe $\mathcal{C}$, intersection de S et $\mathcal{P}$.

Exercice 2

On considère $E = \mathbb{R}_2[X]$, muni du produit scalaire :

$$\forall (P,Q) \in E^2, \quad (P|Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)\mathrm{d}t$$

On définit l'application $\varphi : E \to E$ par :

$$\forall P \in E, \quad \varphi(P(X)) = P(1-X)$$

1. Montrer que φ est un automorphisme orthogonal.

2. Montrer que φ est une symétrie.

3. Donner les éléments caractéristiques de la symétrie φ, et vérifier qu'elle est orthogonale.

Exercice 3

On considère la courbe paramétrée :

$$M(t)\begin{cases} x(t) = \sin^2(t) \\ y(t) = (1+\cos(t))\sin(t) \end{cases}$$

1. Etudier et représenter graphiquement cette courbe dans un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$.
On déterminera la nature des points stationnaires, le cas échéant.

2. a. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{OM}(t)$ et $\overrightarrow{OM}(t+\pi)$ sont orthogonaux.

b. Montrer que le milieu $I(t)$ de $[M(t)M(t+\pi)]$ est sur le cercle $\mathscr{C}$ de centre $\Omega\left(\dfrac{1}{2}, 0\right)$ et de rayon à préciser.

c. Tracer $\mathscr{C}$,placer $M(t)$, et en déduire $M(t+\pi)$ puis $I(t)$.

Exercice 4

On considère la courbe paramétrée :

$$M(t)\begin{cases} x(t) = \dfrac{t^3}{t^2-1} \\ y(t) = \dfrac{t(3t-2)}{3(t-1)} \end{cases}$$

1. Démontrer qu'au voisinage de 1, cette courbe admet une asymptote $\mathscr{D}$ que l'on déterminera.

2. Préciser les positions relatives au voisinage de 1.

Fin de l'énoncé